Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Daniel Ferretto

CURVAS: ESTUDO E VISUALIZAÇÃO COM O SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II

Trabalho de Conclusão de Curso

Florianópolis
2003

Daniel Ferretto

CURVAS: ESTUDO E VISUALIZAÇÃO COM O SOFTWARE CABRI-GÉOMÈTRE II

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática – Habilitação em Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Profº. Méricles Thadeu Moretti, Dr.

Florianópolis
2003

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 03/SCG/03

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Méricles Thadeu Moretti, Dr.
Orientador

Prof. Gilson Braviano, Dr.

Profª. Neri Terezinha Both Carvalho, Drª.

"Cientista que não consegue produzir, coitado, vai ser professor."

Fernando Henrique Cardoso

Este trabalho é para todas as pessoas que, de alguma forma, educam e continuam acreditando em um Brasil melhor e mais justo, apesar de desrespeitadas até pelo nosso ex-Presidente.

Agradecimentos

A realização deste trabalho foi possível graças à colaboração de várias pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram com apoio, solidariedade e participação efetiva.

Reconhecidamente, agradeço

à minha família, especialmente à minha mãe Beatriz;

ao meu Orientador profº Méricles Thadeu Moretti, Dr;

ao professor Gilson Braviano Dr., pelo estímulo.

Sumário

INTRODUÇÃO

Para este trabalho de conclusão de curso, as curvas matemáticas são o objeto de estudo e pesquisa. Minha intenção não é publicar um tratado de matemática, mas um trabalho para consulta, condensando definições, princípios, propriedades e relações entre as curvas, bem como vários modos de se obtê-las.

O interesse surgiu com a idéia do professor Dr. Méricles Thadeu Moretti de representar as famosas curvas matemáticas utilizando um software de geometria dinâmica: o Cabri-Géomètre II. Um trabalho que envolvesse Geometria e informática era algo empolgante e, ao mesmo tempo, desafiador.

A idéia de movimento na Geometria foi idealizada por geômetras gregos através de instrumentos que pudessem descrever curvas mecanicamente definidas.

As curvas, até então representadas em livros, têm um aspecto estático, enquanto o Cabri-Géomètre possibilita a visualização dinâmica do traço daquelas com grau superior e de difícil assimilação a quem as está estudando. Apesar do movimento que o software proporciona às curvas, elas não perdem suas propriedades pré-estabelecidas.

Neste trabalho apresento, primeiramente, as generalidades e definições sobre as curvas. Com isso, darei suporte às propriedades das curvas que serão estudadas adiante.

Em um segundo momento, defino e apresento algumas curvas. As cônicas, cúbicas, quárticas e cicloidais são as curvas focadas neste trabalho. Cada curva contém um breve histórico, bem como suas equações e propriedades.

Após, comento brevemente sobre a Geometria Dinâmica e o software Cabri-Gómètre II.

Por fim, explico como deverá se dar o manuseio do cd (compact disc) que contém as curvas apresentadas neste trabalho.

CAPÍTULO I

1 GENERALIDADES E DEFINIÇÕES SOBRE CURVAS

As definições a seguir foram extraídas, na sua maior parte, do livro Curvas de Alcyr Pinheiro Rangel.

1.1 TIPOS DE EQUAÇÃO

Dependendo das operações que aparecem na equação de uma curva, pode-se classificar esta equação de duas formas:

a) ***Equação algébrica***: é aquela em que as incógnitas estão submetidas, apenas, às operações algébricas, isto é, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;

b) ***Equação transcendente***: é aquela que não satisfaz à condição da equação algébrica. Assim, na equação transcendente, podem aparecer logaritmos, exponenciais, funções circulares, etc.

1.2 CLASSIFICAÇÃO GERAL DAS CURVAS

As curvas, de modo geral, podem ser classificadas de duas maneiras:

a) ***Curva algébrica***: é uma curva cuja equação é algébrica. Um exemplo é a astróide (fig. 1);

b) ***Curva transcendente***: é a curva cuja equação é transcendente. Um exemplo é a *evolvente do círculo* (fig. 2).

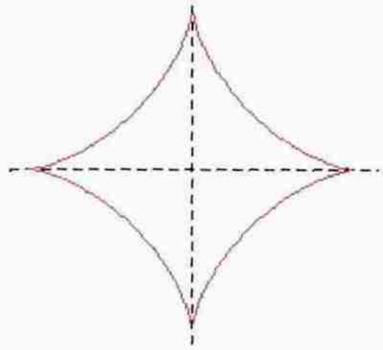


Fig. 1: Astróide

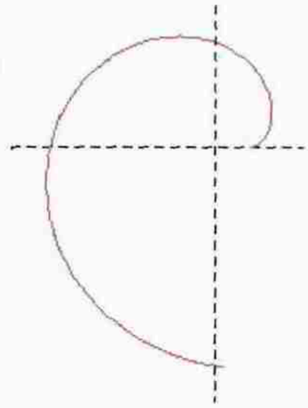


Fig. 2: Evolvente do Círculo

Independente da classificação geral das curvas em algébrica e transcendente, podem ainda as curvas serem agrupadas de outros modos, como, por exemplo:

Curva plana* e *Curva revessa

a) *Curva plana*: é a que pertence a um plano. Admite uma única curvatura que é a *flexão*;

b) *Curva revessa*: é a que não pertence a um plano. Admite duas curvaturas que são a *flexão* e a *torção*.

Curva unicursal* e *Curva multicursal

a) *Curva unicursal*: é a curva algébrica cujas coordenadas do ponto que a descreve são funções algébricas racionais de um mesmo parâmetro;

b) *Curva multicursal*: é a que não satisfaz a condição da curva unicursal.

Curva contínua* e *Curva descontínua

a) *Curva contínua*: é a curva que possui equação contínua, ou seja, as funções que compõem a curva são funções estritamente contínuas. Como exemplo pode-se destacar a *Versiera* (fig. 3);

b) *Curva descontínua*: é a curva que não possui equação contínua. Como exemplo pode-se destacar a *cruciforme* (fig. 4).

Fig. 3: Versiera

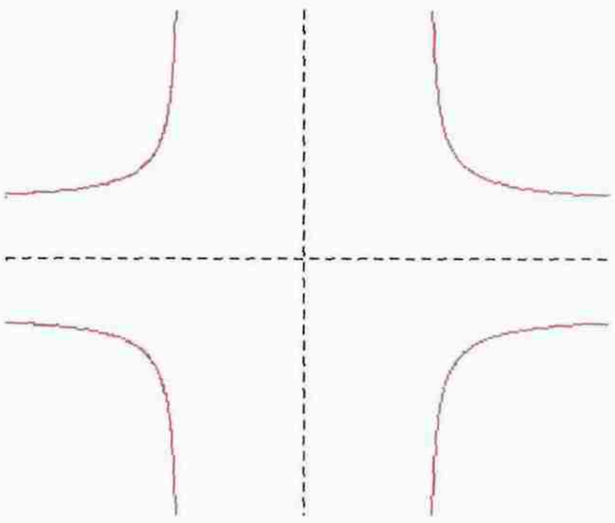


Fig. 4: Cruciforme

Curva fechada* e *Curva aberta

a) *Curva fechada*: é uma curva plana que limita um espaço bi-dimensional finito. Um exemplo é a *limaçon de Pascal* (fig. 5);

b) *Curva aberta*: é a curva plana que não é fechada. Um exemplo é a *parábola* (fig. 6).

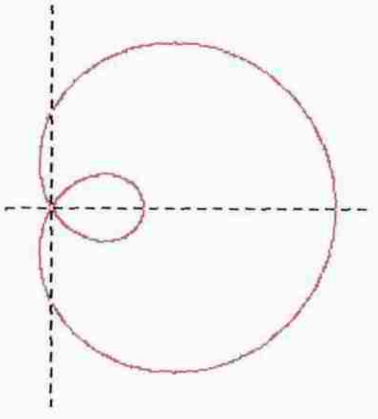


Fig. 5: Limaçon de Pascal

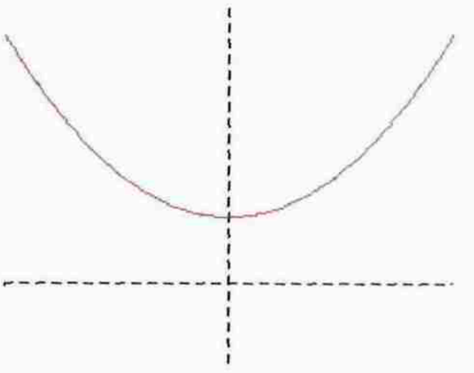


Fig. 6: Parábola

1.3 GRAU

Grau (também chamado ordem) de uma curva, é o grau de sua equação algébrica, depois de reduzida à sua forma inteira e racional mais simples. As curvas transcendentes não têm grau. (Alguns grandes matemáticos acham que as curvas transcendentes devem ser consideradas como de grau infinito).

As curvas do 2º grau também são chamadas cônicas.

As curvas do 3º grau também são chamadas cúbicas.

As curvas do 4º grau também são chamadas quárticas.

1.4 ELEMENTOS DE UMA CURVA

Arco (também chamado *trecho*) de uma curva é qualquer porção linear considerada na curva.

Ramo (também chamado *braço*) de uma curva, de modo geral, é cada uma das partes, aparentemente distintas, de que se compõe a curva.

Vértice de uma curva é o ponto comum da curva com seu eixo.

Na figura 7, tem-se a *lemniscata de Gerono* e seus vértices V1 e V2, bem como seus dois ramos iguais.

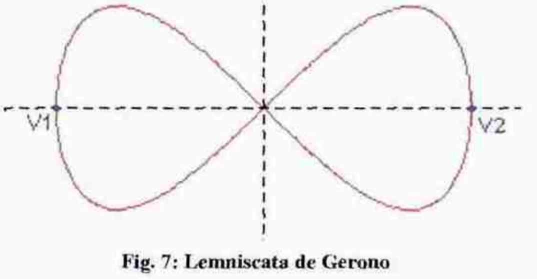


Fig. 7: Lemniscata de Gerono

1.5 EIXO DE SIMETRIA

Eixo de simetria é a reta em relação à qual uma curva é simétrica. O eixo de simetria, por simplificação de linguagem, também é chamado, simplesmente, *eixo*.

Só há uma curva fechada que admite uma infinidade de eixos de simetria: é o *círculo*.

1.6 CORDA

Corda é o segmento de reta cujos extremos pertencem a uma curva. O apoio de uma corda é uma secante.

1.7 SECANTE

Secante é uma reta que tem um ou mais pontos comuns com uma curva.

1.8 TANGENTE

Tangente é uma secante que tem em comum com a curva dois pontos infinitamente próximos; é, portanto, o prolongamento de um elemento infinitamente pequeno da curva.

1.9 NORMAL

Normal a uma curva é a perpendicular à tangente no ponto de tangência.

Na elipse mostrada na figura 8, vê-se a reta secante *s* e a reta tangente *t*. A própria reta *s* é a normal à curva.

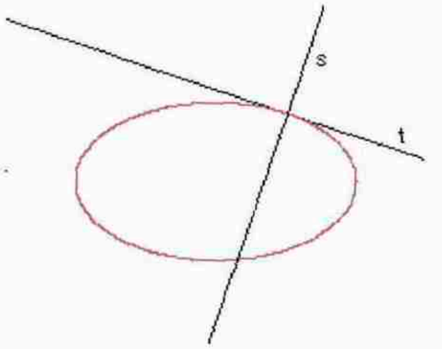


Fig. 8: Elipse

1.10 ASSÍNTOTA

Quando o ponto que gera a curva pode afastar-se indefinidamente, a tangente no ponto do infinito da curva chama-se *assíntota*.

É hábito de linguagem chamar-se assíntota à reta que tangencia uma curva no infinito.

1.11 CURVA CUSPIDAL

Curva cuspidal é a que possui ponto cuspidal (ponto de reversão ou ponto anguloso). (Ver *ponto cuspidal,* pág. 15).

1.12 CURVA ACNODAL

Curva acnodal é a que tem ponto acnodal (ponto isolado). (Ver *ponto acnodal,* pág. 15).

1.13 CURVA CRUNODAL

Curva crunodal é a curva que tem ponto crunodal (ponto múltiplo). (Ver *ponto crunodal,* pág. 15).

Na figura 9, vê-se as cissóides cuspidal, acnodal e crunodal, como exemplos.

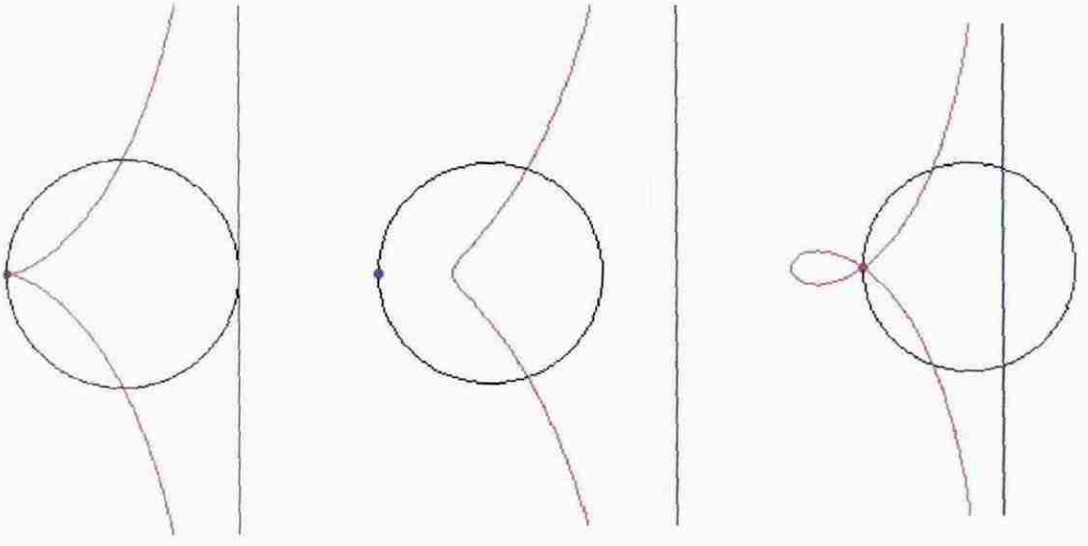


Fig. 9: Cissóides

1.14 BRAQUISTÓCRONA

Braquistócrona é a curva que um ponto (corpo pesado) percorre quando este se desloca de uma posição a outra mais baixa, no mais curto espaço de tempo possível, sendo nula a velocidade inicial, sujeito, apenas, à ação da gravidade e não estando os dois pontos na mesma vertical. Essa curva é uma ciclóide ordinária (fig. 10). (O nome braquistócrona vem do grego: brahkhistos = o mais curto; khronos = tempo).

1.15 TAUTÓCRONA

Tautócrona (também chamada *isócrona*) é a curva que um ponto (corpo pesado) percorre sempre no mesmo tempo, sendo nula a velocidade inicial e sujeito, apenas, à ação da gravidade. Este ponto parte de qualquer lugar dessa curva e chega a qualquer outro lugar dessa mesma curva. Essa curva é uma ciclóide ordinária (fig. 10). (O nome tautócrona vem do grego: tauto = o mesmo; khronos = tempo).

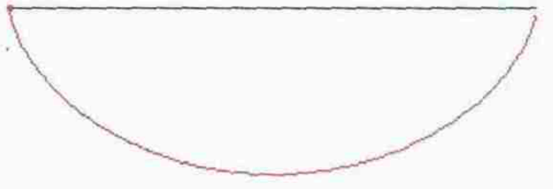


Fig. 10: Ciclóide

1.16 LEMNISCATAS

Lemniscatas são curvas cuja forma lembra a forma do algarismo arábico "oito". Algumas lemniscatas têm nomes especiais, como, por exemplo a lemniscata de Bernoulli e a lemniscata de Gerono (fig. 7).

1.17 PONTOS SINGULARES DE UMA CURVA

Pontos singulares de uma curva são pontos que apresentam particularidades que os distinguem dos demais.

São pontos singulares:

a) ***Ponto de inflexão***

Admita-se o ponto gerador de uma curva caminhando num determinado sentido. As várias tangentes em cada ponto, se apresentam com um deslocamento angular num determinado sentido. Do ponto P em diante, embora o movimento do ponto continue no mesmo sentido, o movimento angular da tangente muda de sentido. O ponto P chama-se *ponto de inflexão*. Na figura 11, os pontos *I* e *J* são pontos de inflexão.

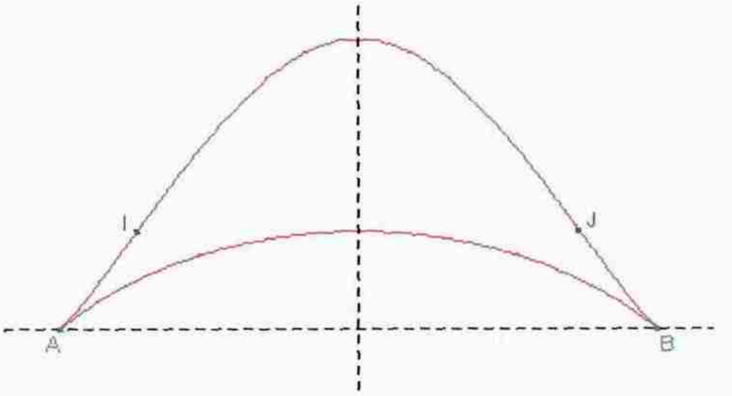


Fig. 11: Bicórnio

b) ***Vértice***

Vértice de uma curva é o ponto comum da curva com seu eixo. No vértice, a tangente à curva é perpendicular ao eixo.

c) ***Centro***

Centro é o ponto em relação ao qual uma curva é simétrica.

d) ***Ponto múltiplo***

Ponto múltiplo é aquele em que o ponto gerador da curva, em seu movimento, passa mais de uma vez por ele mesmo. O número de vezes que o ponto gerador passa pelo mesmo ponto chama-se *ordem do ponto múltiplo*.

Tem-se, então:

- Ponto duplo → 2ª ordem → duas vezes
- Ponto triplo → 3ª ordem → três vezes
- Ponto quádruplo → 4ª ordem → quatro vezes, etc.

De acordo com o número de tangentes existentes no ponto múltiplo, este recebe os seguintes nomes:

1) ***Ponto de osculação***, quando há somente uma tangente. Quando a tangente no ponto fica situada entre ramos da curva, o ponto chama-se *ponto de osculação de primeira espécie*. Na figura 12, o ponto *O* é um ponto de osculação duplo de 1ª espécie. Quando a tangente no ponto não fica situada entre ramos da curva, isto é, toda curva fica do mesmo lado da tangente, o ponto chama-*se ponto de osculação de segunda espécie*.
2) ***Ponto crunodal***, quando há mais de uma tangente. Na figura 13, tem-se o ponto *O* como ponto crunodal duplo.

e) ***Ponto acnodal*** (também chamado *ponto isolado* ou *ponto conjugado*)

Ponto acnodal é o ponto em que, embora satisfaça a equação da curva, aparece isoladamente; nesse ponto a tangente não pode ser representada graficamente, uma vez que ela é imaginária.

f) ***Ponto cuspidal***

Ponto cuspidal é o ponto a partir do qual o sentido do movimento do ponto gerador muda bruscamente.

Na figura 14, tem-se um ponto acnodal e um cuspidal, respectivamente.

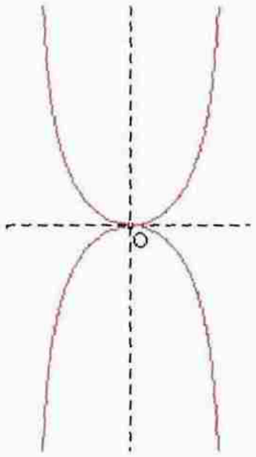


Fig. 12: Capa

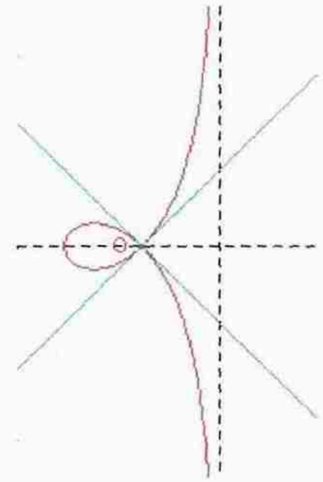


Fig. 13: Estrofóide reta

De acordo com o número de tangentes existentes no ponto cuspidal, este recebe os seguintes nomes:

1) Ponto de reversão, quando há somente uma tangente.

Quando a tangente no ponto de reversão fica situada entre ramos da curva, o ponto chama-se *ponto de reversão de primeira espécie*. Na figura 11, tem-se os pontos A e B como exemplos de pontos de reversão de primeira espécie.

Quando a tangente no ponto de reversão não fica situada entre ramos da curva, isto é, toda a curva fica no mesmo lado da tangente, o ponto chama-se *ponto de reversão de segunda espécie*.

2) Ponto anguloso, quando existem duas tangentes distintas.

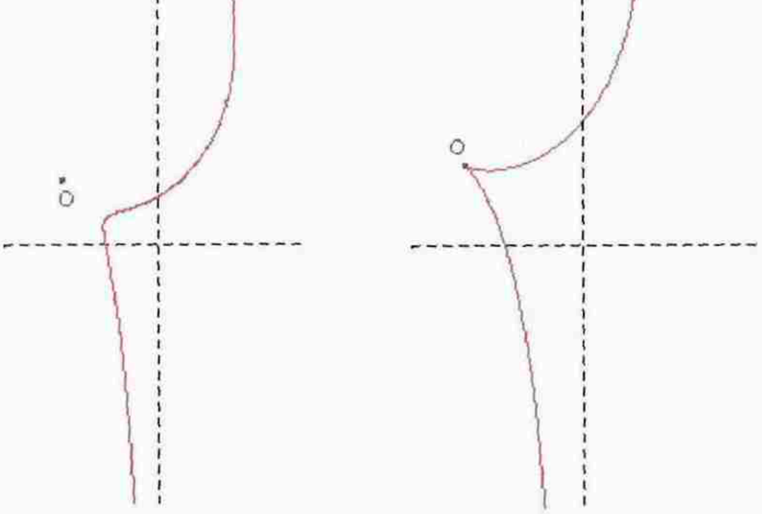


Fig. 14: Cissóides

CAPÍTULO II

2 CURVAS PLANAS

O lugar geométrico dos pontos de um plano que satisfazem uma determinada condição é chamado *curva plana*. Esta condição chama-se *lei de geração* e a expressão matemática que traduz este lugar geométrico chama-se *equação da curva*.

Neste trabalho, optou-se por dividir as curvas planas de acordo com o seu grau, ou seja, *curvas planas do 2º grau*, *curvas planas do 3º grau*, *curvas planas do 4º grau*, e *curvas planas cicloidais*.

As referências históricas de cada curva contidas neste trabalho foram apoiadas nos sites http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html e http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html.

2.1 CURVAS PLANAS DE 2º GRAU

As curvas planas de 2º grau também são chamadas cônicas.

As cônicas estudadas neste trabalho são brevemente definidas, visto que sua bibliografia é ampla e de fácil acesso.

2.1.1 ELIPSE

HISTÓRIA

A elipse foi primeiramente estudada por Menaechmus. Euclides escreveu sobre a elipse e seu nome atual foi dado por Apollonius.

Kepler, em 1602, acreditava que a órbita de Marte era oval. Mais tarde ele descobriu que a referida órbita era uma elipse, tendo o sol como um dos focos. Foi Kepler que, em 1609, introduziu a palavra foco, e a publicou.

Em 1705, Halley mostrou que o cometa, que é conhecido por seu nome, se move em órbita elíptica em volta do sol.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de centro F_1, raio R e um outro ponto F_2 no seu interior. ($F1$ e F_2 são os *focos*).

Considere um ponto S sobre a circunferência.

Seja a mediatriz m do segmento F_2S.

Seja P a intersecção de m com o segmento F_1S.

O lugar geométrico dos pontos P quando S se movimenta sobre a circunferência é a curva chamada *elipse*.

EQUAÇÃO

Cartesiana: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

PROPRIEDADES

A elipse é uma curva plana e fechada. Possui dois eixos de simetria, quatro vértices e dois focos.

Quando um dos eixos da elipse tende a igualar-se como outro, a elipse tende para a circunferência; assim, a circunferência é um caso particular de elipse, por isso chamada elipse equilátera.

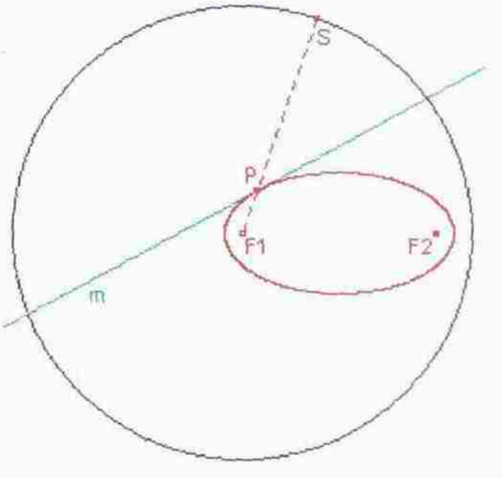


Fig. 15: Elipse

2.1.2 HIPÉRBOLE

HISTÓRIA

Um caso especial de hipérbole foi estudado primeiramente por Menaechmus.

Euclides e Aristaeus escreveram sobre vários casos de hipérbole, mas estudaram somente um caso especial.

Os focos foram considerados, primeiramente, por Pappus.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de centro F_1, raio R e um ponto F_2 exterior a ela. (F_1 e F_2 são os *focos*).

Considere um ponto S sobre a circunferência. Seja m a mediatriz do segmento F_2S.

Considere P como sendo a intersecção de m com a reta suporte de F_1S.

O lugar geométrico dos pontos P, assim obtidos, chama-se *hipérbole*.

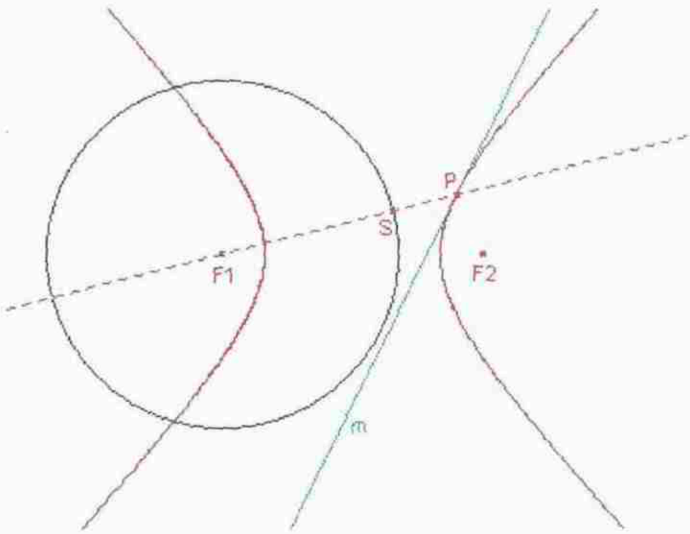


Fig. 16: Hipérbole

EQUAÇÃO

Cartesiana: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

PROPRIEDADES

A hipérbole é uma cônica plana e aberta; possui dois ramos.

2.1.3 PARÁBOLA

HISTÓRIA

A parábola foi estudada por Menaechmus que foi um aluno de Platão e Eudoxus.

Euclides escreveu sobre a parábola e o presente nome foi dado por Apollonius.

Pascal considerou a parábola como a projeção de uma circunferência e Galileu mostrou que os projéteis seguem trajetos parabólicos.

Gregory e Newton consideraram que os raios paralelos ao eixo de uma parábola refletem-se sobre seu foco.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma reta d e um ponto F não pertencente à reta d.

(A reta d é a *diretriz* e o ponto F é o *foco*).

Traça-se por F uma reta s perpendicular à diretriz. Esta reta é o eixo da parábola.

Nomeia-se A como sendo o ponto de encontro entre a diretriz e o eixo.

O ponto médio do segmento FA é o ponto V, ou seja, o vértice da parábola.

Seja S um ponto da diretriz e t a reta perpendicular à diretriz passando por S.

Existe uma mediatriz do segmento FS. Seja, por exemplo, m esta mediatriz e Q o ponto de encontro entre a mediatriz m e a reta t.

Ao lugar geométrico dos pontos Q, assim obtidos, chamamos de parábola.

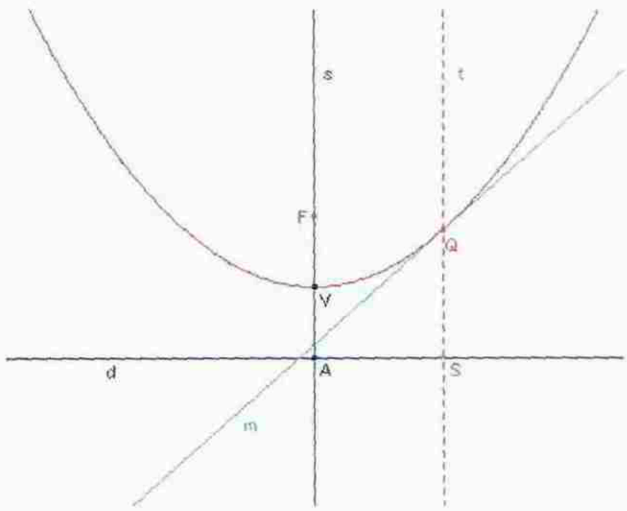


Fig. 17: Parábola

Nota-se que $FQ = SQ$.

EQUAÇÃO

Sendo p a distância AF, tem-se:

a) Cartesiana: $y^2 = 2px - p^2$

b) Polar: $r = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$

PROPRIEDADES

É uma curva plana e aberta. O vértice é o ponto médio da distância entre a diretriz e o foco. O ângulo formado pelas duas tangentes à curva, traçadas do mesmo ponto da diretriz é reto.

2.2 CURVAS PLANAS DE 3º GRAU

As curvas planas do 3º grau também são denominadas cúbicas.

Entre as cúbicas, há as que têm como elementos básicos para a sua geração um *ponto*, uma *circunferência* e uma *reta*. Essas cúbicas são chamadas *cúbicas circulares ou cíclicas de 3ª ordem*.

O ponto chama-se *polo*, a circunferência chama-se *base*, e a reta chama-se *diretriz*.

De acordo com a posição relativa dos elementos que geram uma cúbica, têm-se os vários tipos existentes, sendo que algumas cúbicas recebem nomes especiais.

2.2.1 CISSÓIDE

A cissóide é uma cúbica que tem como elementos básicos para a sua geração, o ponto, a circunferência e a reta, logo é uma cúbica circular. O ponto é o *polo*, a circunferência é a *base* e a reta é a *diretriz*.

Quando o polo pertence ao diâmetro da base perpendicular à diretriz, a curva chama-se *cissóide reta*; para qualquer outra posição do polo, a curva chama-se *cissóide oblíqua*. As figuras 18, 19 e 20 são exemplos de cissóides retas, enquanto as figuras 21, 22 e 23 são exemplos de cissóides oblíquas.

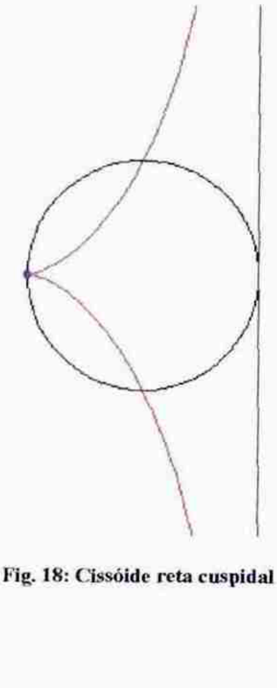


Fig. 18: Cissóide reta cuspidal

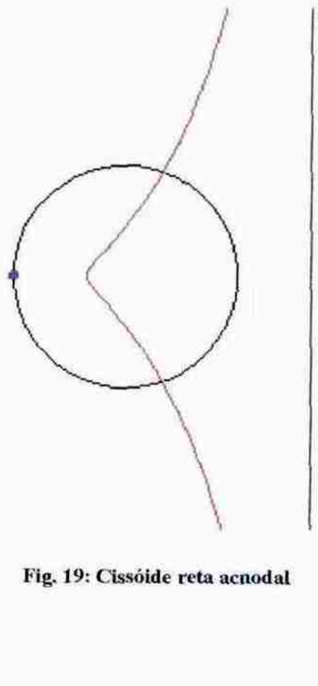


Fig. 19: Cissóide reta acnodal

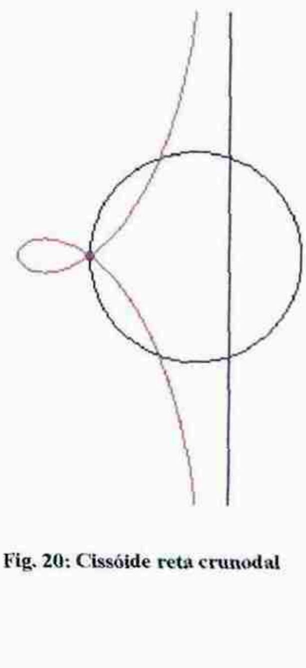


Fig. 20: Cissóide reta crunodal

De acordo com a posição da diretriz em relação à base, têm-se os seguintes casos:

a) Quando a diretriz (reta) é tangente à base (circunferência), a curva é cuspidal e chama-se *cissóide cuspidal*. As figuras 18 e 21 são exemplos de cissóides cuspidais.
b) Quando a diretriz não possui ponto comum com a base, a curva é acnodal e chama-se *cissóide acnodal*. As figuras 19 e 22 são exemplos de cissóides acnodais.
c) Quando a diretriz é secante à base, a curva é crunodal e chama-se *cissóide crunodal*. As curvas 20 e 23 são exemplos de cissóides crunodais.

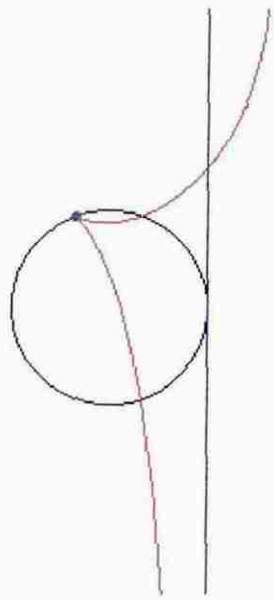


Fig. 21: Cissóide obliqua cuspidal

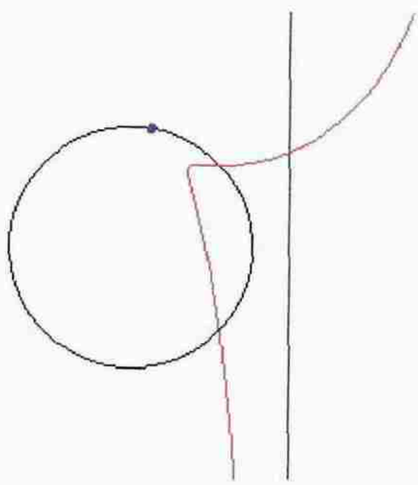


Fig. 22: Cissóide obliqua acnodal

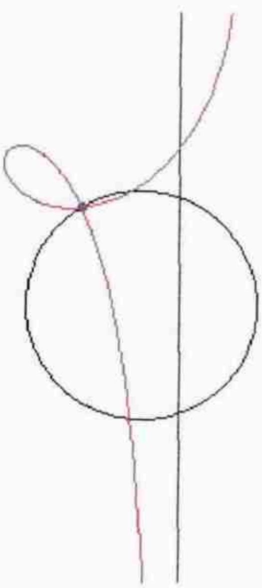


Fig. 23: Cissóide obliqua crunodal

CISSÓIDE DE DIOCLÈS
(Cissóide reta cuspidal)

HISTÓRIA

Esta curva foi descoberta por Dioclès em, aproximadamente, 180 a.C. para resolver o problema da duplicação do cubo. No entanto ele não a chamava de cissóide. Após um século, em um trabalho de Geminus, o nome cissóide apareceu pela primeira vez. Huygens e Wallis, descobriram, em 1658, que a área entre a curva e sua assíntota é $3\pi a^2$. Em 1689, J. C. Sturm, em seu livro *Mathesis Enucleata*, forneceu um dispositivo mecânico para a construção da cissóide de Dioclès. Desde a segunda metade do século XVII até hoje tem-se estudado vários aspectos dessa curva. Dentre os matemáticos que deram contribuições ao estudo da cissóide destacamos, dentre os já citados, Sluse, Fermat, Roberval e Newton.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro AO e seja t a tangente em A. (A circunferência é a *base*, o ponto O é o *polo* e a tangente t é a *diretriz*).

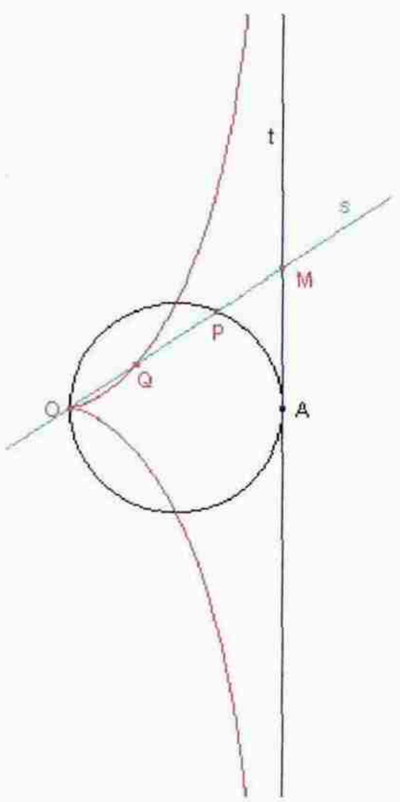


Fig. 24: Cissóide de Dioclès

Cada reta do plano da circunferência e pertencente a O, determina um ponto na circunferência e outro na tangente t. Seja s, por exemplo, uma dessas retas; tem-se P na circunferência e M na tangente t. Marca-se na reta s o ponto Q sendo $MQ = OP$. O lugar geométrico dos pontos Q, assim obtidos, é a curva chamada *cissóide de Dioclès*. Como se verifica facilmente, a curva determinada é a *cissóide reta cuspidal*.

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro AO, tem-se:

a) Cartesiana: $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$

b) Polar: $r = 2a\tan(\theta)\mathrm{sen}(\theta)$

PROPRIEDADES

É uma cúbica circular plana, unicursal, contínua e cuspidal. A curva é aberta tendo um eixo de simetria e um ponto de reversão de primeira espécie, que pertence ao eixo. Tem uma assíntota perpendicular ao eixo e sua distância ao ponto de reversão é igual ao diâmetro da base.

Na figura 24, o eixo de simetria contém o segmento AO e o ponto de reversão é o ponto O.

A cissóide reta cuspidal (cissóide de Dioclès) é a podária* da parábola em relação ao vértice desta. (Fig. 25).

* Curva podária é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de um ponto às tangentes a uma curva dada.

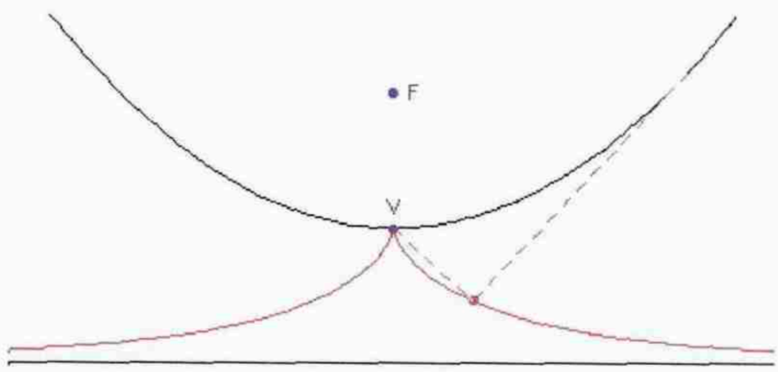


Fig. 25: Cissóide (podária)

2.2.2 ESTROFÓIDE

HISTÓRIA

A mais antiga referência conhecida dessa curva encontra-se em duas cartas escritas por F. de Verdus a Torricelli em 1635. O matemático francês Roberval foi o primeiro geômetra que tratou de estudá-la. Nessa época ela era chamada de *pteróide*. Mais tarde ela foi estudada por Moivre em 1715 e por Agnesi em 1748. Parece que foi Montucci que a chamou pela primeira vez de estrofóide num artigo publicado em 1846. Em grego: strophê(volta) eidos (forma). O matemático Lehmus a chamava de *kukumaeide* e Booth a chamava de *logociclic*.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro AO e seja t uma reta perpendicular a uma reta u que contém AO, em seu ponto médio C (centro da circunferência). (A circunferência é a *base*, o ponto O é o *polo* e a reta t é a *diretriz*).

Cada reta do plano da circunferência e pertencente ao ponto O determina um ponto na circunferência e outro em t.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas; tem-se P na circunferência e M em t.

Marca-se na reta s o ponto Q sendo $MQ = OP$.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *estrofóide reta*.

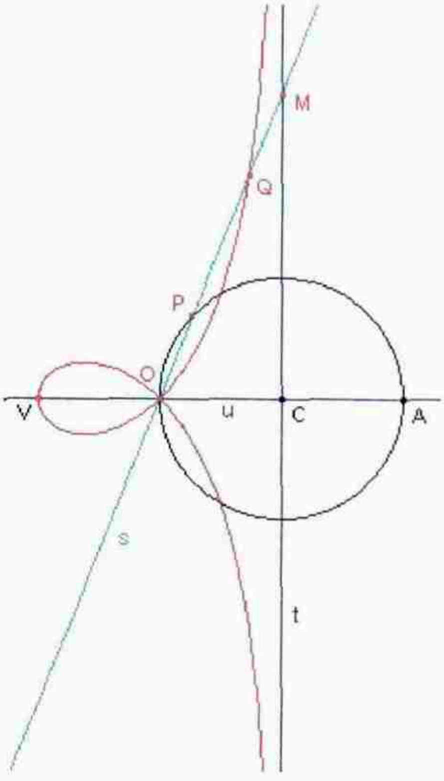


Fig. 26: Estrofóide reta

EQUAÇÃO

Sendo a o raio OC, tem-se:

a) Cartesiana: $y^2 = x^2\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$

b) Polar: $r = a\left(\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\right)$

PROPRIEDADES

É uma cúbica circular plana, unicursal, contínua e crunodal. É uma curva aberta que possui um eixo de simetria, um vértice, e um ponto crunodal duplo que pertence ao eixo. Possui uma assíntota perpendicular ao eixo e sua distância ao ponto duplo é igual ao raio da base. O ponto duplo fica na metade da distância entre o vértice e a assíntota. É uma cissóide crunodal em que a diretriz pertence ao ponto médio da base.

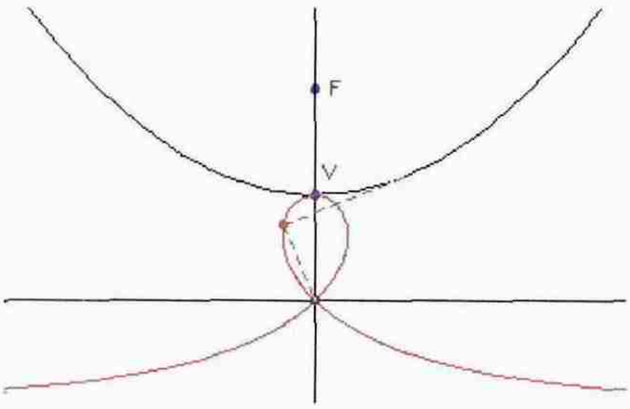


Fig. 27: Estrofóide (podária)

Na figura 26, o eixo de simetria é a reta u, o vértice é o ponto V, e o ponto duplo é O. A assíntota é a reta t.

A estrofóide reta é a podária da parábola em relação ao ponto de intersecção da diretriz com o eixo desta parábola. (fig. 27)

2.2.3 TRISSECTRIZ DE MACLAURIN

HISTÓRIA

Esta curva foi estudada primeiramente por Colin Maclaurin em 1742. Como muitas curvas foram estudadas para fornecer a solução para antigos problemas gregos, esta foi criada para resolução do problema da trissecção do ângulo.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

É uma cissóide reta crunodal em que a diretriz é perpendicular ao raio da base que pertence ao polo, em seu ponto médio.

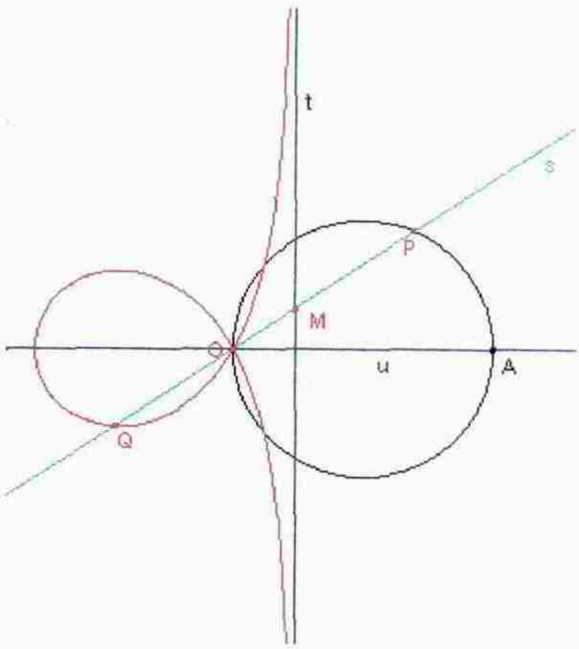


Fig. 28: Trissectriz de Maclaurin

EQUAÇÃO

Sendo a a metade do raio da base, tem-se para equação:

a) Cartesiana:

$$y^2(a+x) = x^2(3a-x)$$

b) Polar: $$r = \frac{2a\,\text{sen}\,3\theta}{\text{sen}\,2\theta}$$

2.2.4 CONCHÓIDE DE SLUSE

HISTÓRIA

Esta curva foi construída primeiramente por René de Sluse em 1662. René Francois Walter – Barão de Sluse, era um homem tão importante na igreja como era na matemática. Ele contribuiu para a geometria das espirais. Inventou, também, um método geral para encontrar pontos de inflexão de uma curva.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

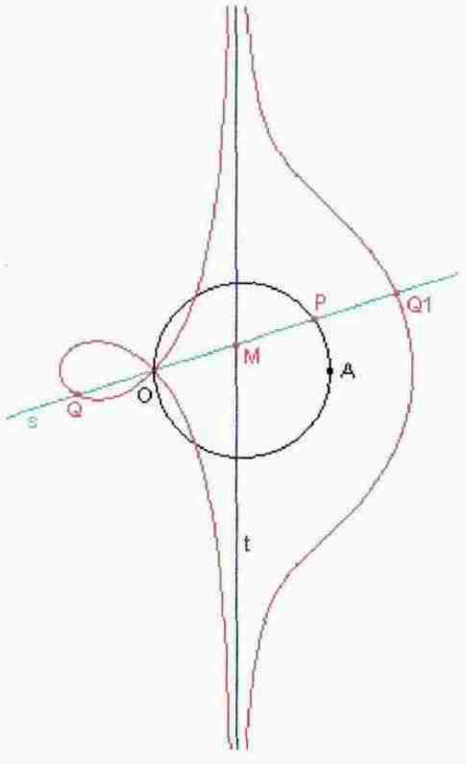


Fig. 29

Seja uma circunferência de diâmetro *AO* e seja *t* uma reta perpendicular ao diâmetro AO. (A circunferência é a *base*, o ponto *O* é o *polo* e a reta *t* é a *diretriz*).

Cada reta do plano da circunferência e pertencente a *O*, determina um ponto na circunferência e outro na reta *t*.

Seja *s*, por exemplo, uma dessas retas; tem-se *P* na circunferência e *M* na reta *t*.

Marca-se na reta *s*, a partir de M e nos dois sentidos, os pontos *Q* e Q_1, sendo $MQ = MQ_1 = OP$.

O lugar geométrico dos pontos Q_1, assim obtidos, é a curva chamada *conchóide de Sluse*.

A cada cissóide reta corresponde uma conchóide de Sluse.

As figuras 29, 30 e 31 mostram, respectivamente, a cissóide crunodal, a cissóide cuspidal e a cissóide acnodal, com as conchóides de Sluse correspondentes.

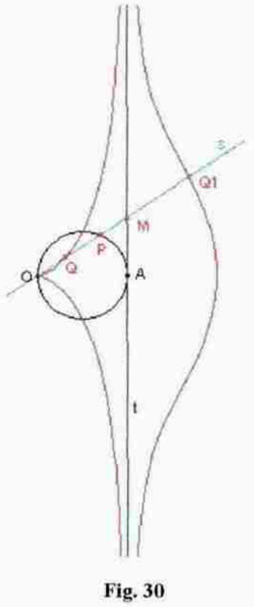


Fig. 30

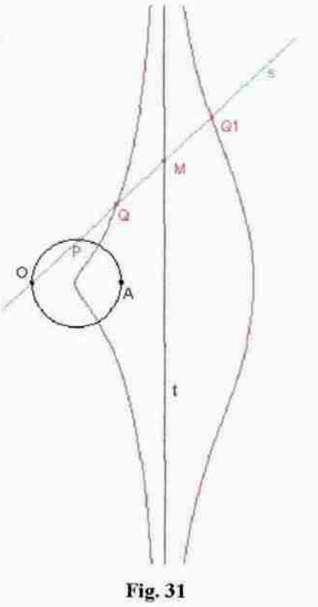


Fig. 31

2.2.5 VERSIERA OU "BRUXA DE AGNESI"

HISTÓRIA

Essa curva é chamada de Agnesi, em homenagem à matemática italiana Maria Agnesi (1718 – 1799) que a citou em seu livro de cálculo *Istituzioni Analitiche* publicado em 1748 com o nome de *versiera*. Há uma discussão sobre como surgiu o nome "Bruxa de Agnesi". A curva havia sido estudada anteriormente por Fermat e Guido Grandi em 1703.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro AO e seja t a tangente em A. (A circunferência é a *base*, o ponto O é o *polo*, e a reta t é a *diretriz*).

Cada reta do plano da circunferência e pertencente ao ponto O determina um ponto na circunferência e outro na tangente t.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas; tem-se P na circunferência e M na tangente t.

Traça-se por M a paralela a AO e por P a perpendicular a AO. Essas duas retas determinam o ponto Q.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *versiera*.

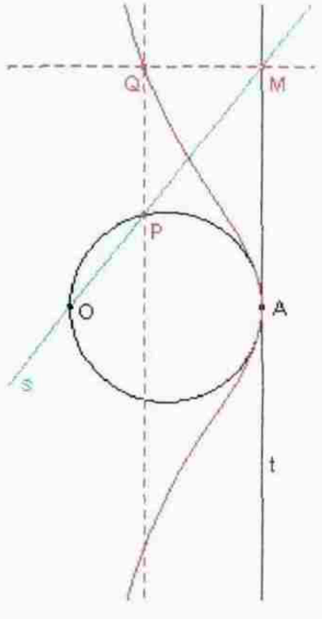


Fig. 32: Versiera

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro AO, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$$

b) Polar: $$r\cos\theta = \frac{a^3}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta + a^2}$$

PROPRIEDADES

É uma cúbica plana, unicursal, contínua e aberta. A curva tem um eixo de simetria e um vértice. Tem uma assíntota que dista do vértice de um comprimento igual ao diâmetro da base. Tem, ainda, dois pontos de inflexão.

Na figura 32, o eixo de simetria é a reta que contém o diâmetro AO, e o vértice é o ponto A. A assíntota é a reta tangente em O.

A versiera é uma cissóide reta acnodal.

2.2.6 PSEUDO-VERSIERA

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

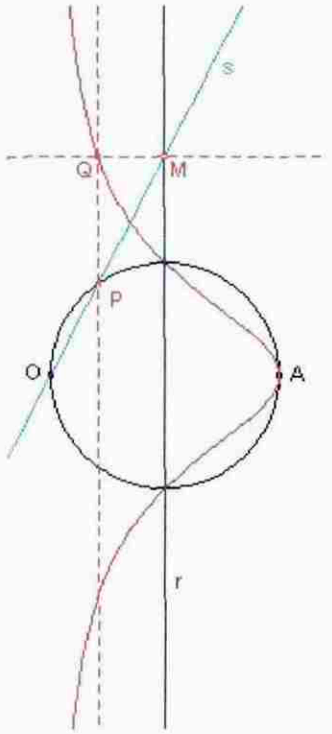


Fig. 33: Pseudo-versiera

Seja uma circunferência de diâmetro AO e seja r uma reta do plano da circunferência, perpendicular a AO, em seu ponto médio. (A circunferência é a *base*, o ponto O é o *polo* e a reta r é a *diretriz*).

Cada reta do plano da circunferência e contendo o ponto O, determina um ponto na circunferência e outro em r.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas; tem-se P na circunferência e M em r.

Traça-se por M a paralela a AO e por P a perpendicular a AO. Essas duas retas determinam o ponto Q.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *pseudo-versiera*.

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro AO, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2 = \frac{a^2(a-x)}{4x}$$

b) Polar: $$r\cos\theta = \frac{2a^3}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta + a^2}$$

PROPRIEDADES

É uma cúbica plana, contínua e aberta. A curva possui um eixo de simetria e um vértice. Tem uma assíntota que dista do vértice de um comprimento igual ao diâmetro da base. Admite uma tangente perpendicular ao eixo, no vértice. Tem dois pontos de inflexão.

Na figura 33, o eixo de simetria é a reta que contém o diâmetro AO e o vértice é o ponto A. A assíntota é a tangente em O.

2.2.7 VISIERA

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro AO e seja t a tangente em A. (A circunferência é a *base*, o ponto O é o *polo* e a reta t é a *diretriz*).

Cada reta do plano da circunferência e pertencente ao ponto O determina um ponto na circunferência e outro na tangente t.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas; tem-se P na circunferência e M na tangente.

Marca-se o ponto Q, ponto médio do segmento PM.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *visiera*.

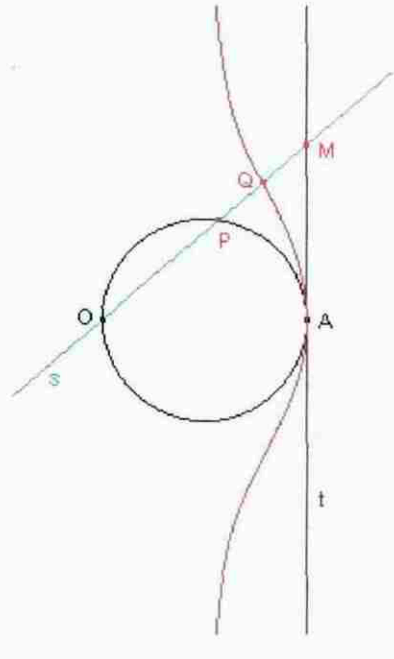


Fig. 34: Visiera

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro AO, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2 = \left(\frac{ax^2}{2x-a}\right) - x^2$$

b) Polar: $$r = \frac{a\,\text{sen}^2\,\theta}{2\cos\theta}$$

PROPRIEDADES

É uma cúbica plana, unicursal, contínua e aberta. A curva tem um eixo de simetria e um vértice. Tem uma assíntota, que dista do vértice de um comprimento igual ao raio da base;

logo, é uma reta perpendicular ao eixo e contendo o centro da base. Tem dois pontos de inflexão. É uma curva acnodal.

Na figura 34, o eixo de simetria é a reta que contém o diâmetro AO, e o vértice é o ponto A. A assíntota é a reta imaginária perpendicular a AO em seu ponto médio.

A visiera é uma cissóide reta acnodal (conchóide de Sluse).

2.3 CURVAS PLANAS DE 4º GRAU

As curvas planas do 4º grau também são chamadas *quárticas* ou *biquadráticas*.

Entre as quárticas, há umas que têm como elementos básicos para sua geração, um *ponto*, uma *circunferência* e uma *reta*. De acordo com as posições relativas desses elementos e a lei de geração, têm-se vários tipos de quárticas.

As quárticas que têm como elementos básicos o ponto, a circunferência e a reta, são chamadas *quárticas circulares*. O ponto chama-se *polo*, a circunferência chama-se *base* e a reta chama-se *diretriz*.

2.3.1 BESÁCEA

(Também chamada parábola virtual de Gregoire de Saint-Vincent)

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência e dois diâmetros perpendiculares *AB* e *DE*.

Considera-se um ponto *M* fixo na circunferência, não podendo *M* coincidir com *A*, *B*, *D* nem *E*. (Havendo coincidência, tem-se os casos particulares: *lemniscata de Gerono* ou *parábola*).

Cada secante paralela a *AB*, determina dois pontos na circunferência e um ponto em *DE*. Seja, por exemplo, *s* uma dessas secantes, que determina *J* e *K* na circunferência, e *P* em *DE*.

Ficaram, assim, definidas as cordas *JM* e *KM*.

Marca-se na secante *s*, a partir de *P* e nos dois sentidos, segmentos iguais aos comprimentos das cordas *JM* e *KM*. Tem-se os pontos Q, Q_1, Q_2 e Q_3, onde

$$PQ = PQ_1 = KM \quad e \quad PQ_2 = PQ_3 = JM$$

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *besácea*.

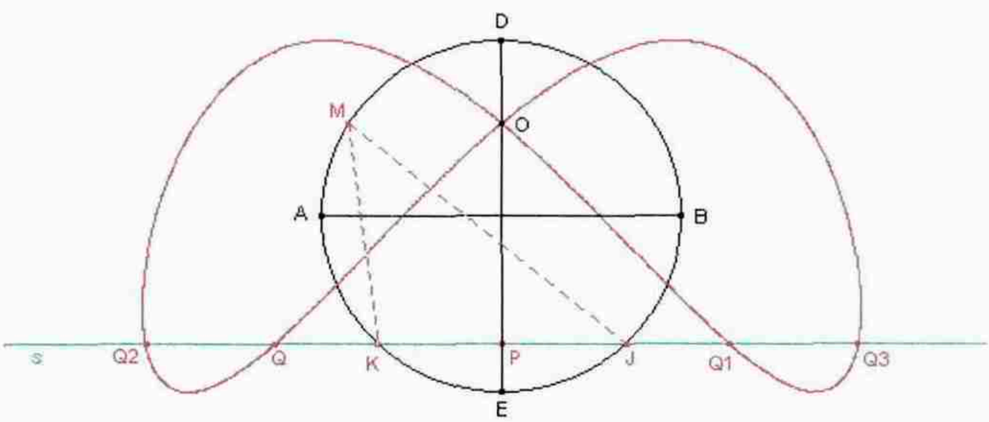


Fig. 35: besácea

EQUAÇÃO

Sendo $a/2$ a distância do ponto M ao diâmetro DE, e sendo $b/2$ a distância do ponto M ao diâmetro AB, tem-se:

a) Cartesiana: $$(x^2 + by)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

b) Polar: $$r = \frac{a\sqrt{\cos 2\theta - b \operatorname{sen} \theta}}{\cos^2 \theta}$$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, unicursal, fechada, contínua e crunodal. Admite dois ramos iguais e um ponto crunodal duplo comum. Tem um eixo de simetria que pertence ao ponto duplo.

Na figura 35, o eixo de simetria é a reta imaginária que contém DE, e o ponto duplo é o ponto O.

2.3.2 LEMNISCATA DE GERONO

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja Uma circunferência de diâmetro OC e considere-se a tangente t no ponto O.

Cada secante paralela a OC, determina dois pontos, um na circunferência e outro em t.

Seja, por exemplo, s uma dessas secantes, que determina S na circunferência, e P em t.

Marca-se na secante s, a partir do ponto P, e nos dois sentidos, segmentos iguais ao comprimento da corda OS. Tem-se os pontos Q e Q_1, onde

$$PQ = PQ_1 = OS$$

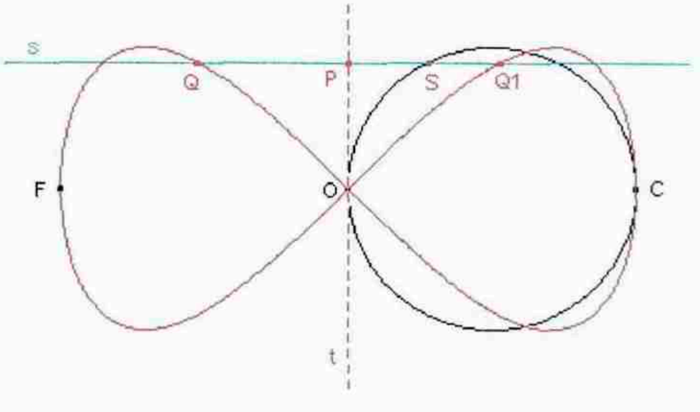


Fig. 36: Lemniscata de Gerono

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *lemniscata de Gerono*.

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro OC, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2 = \frac{x^2(a^2 - x^2)}{a^2}$$

b) Polar: $$r^2 = a^2(1 - tg^2\theta)(1 + tg^2\theta)$$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, unicursal, contínua, fechada e crunodal. Tem dois ramos iguais que admitem um ponto duplo crunodal comum. Tem dois eixos de simetria diferentes, um centro e dois vértices pertencentes ao mesmo eixo. O centro é o ponto duplo.

Na figura 36, os eixos de simetria são a reta t e a reta imaginária OC.

A lemniscata de Gerono é um caso particular da Besácea.

2.3.3 COCHÓIDE DE NICOMEDES OU CONCHÓIDE DA RETA

HISTÓRIA

Foi estudada pelo matemático grego Nicomedes em, aproximadamente, 200 a. C., relacionando-a com os problemas da trissecção do ângulo e com a duplicação do cubo. Pappus atribuiu a Nicomedes a conchóide como sua maior invenção.

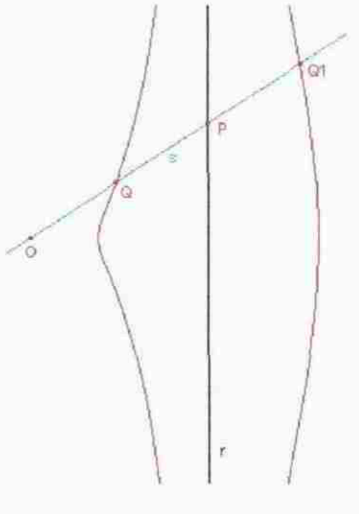


Fig. 37: Conchóide acnodal

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja um ponto O, uma reta r e uma grandeza linear h. (O ponto O é o *polo*, a reta r é a *diretriz*, e a grandeza h é o *intervalo da conchóide*).

Cada reta do plano e que contém O determina um ponto em r.

Seja, por exemplo, s uma dessas retas que determina em r o ponto P.

Marca-se na reta s a partir de P e nos dois sentidos, a grandeza h. Tem-se os pontos Q e Q_1.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *conchóide de Nicomedes*.

A curva compõe-se de dois grandes ramos diferentes entre si e situados um de cada lado da reta *r*. O ramo mais próximo do polo chama-se *anterior* (também chamado *inferior*), e o outro ramo chama-se *posterior* (também chamado *superior*).

EQUAÇÃO

Sendo a a distância de O a r, e sendo h o intervalo da conchóide, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2 = \frac{x^2(h+a-x)(h-a+x)}{(x-a)^2}$$

b) Polar: $$r = \frac{a}{\cos\theta} \pm h$$

PROPRIEDADES

É uma curva plana de 4º grau, unicursal, contínua e aberta. Possui eixo de simetria e vértices. Tem assíntota. Admite um ramo de cada lado da assíntota, sendo esses ramos assintóticos desta mesma assíntota.

(Observação: há, teoricamente, uma circunferência cujo centro é o polo, e cujo diâmetro é o intervalo h. Essa circunferência não é desenhada pois é totalmente desnecessária para o traçado desta curva).

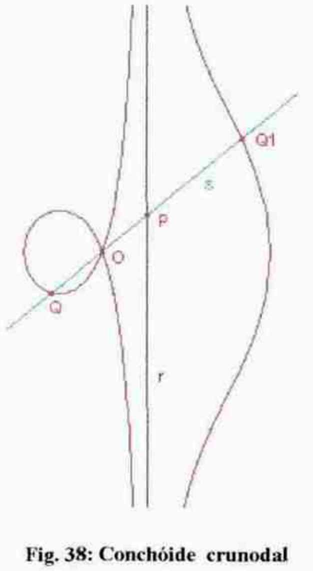


Fig. 38: Conchóide crunodal

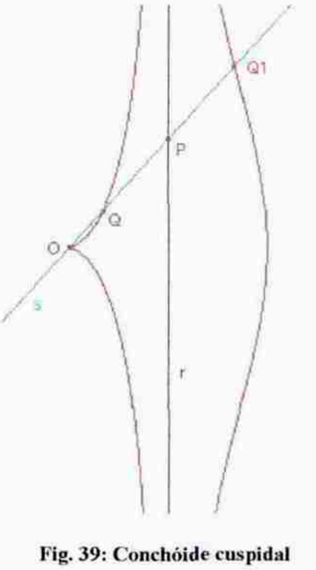


Fig. 39: Conchóide cuspidal

2.3.4 LIMAÇON DE PASCAL

(Também chamada *caracol de Pascal* ou *conchóide da circunferência*)

HISTÓRIA

Esta curva foi estudada pela primeira vez pelo matemático francês Roberval que a utilizou como exemplo num de seus escritos por volta de 1630 denominando-a de limaçon de Pascal.

A referência a Pascal não é do matemático Blaise Pascal mas sim do seu pai Étienne Pascal que estudou a curva tão completamente que por sugestão de Roberval, a partir daí, leva o seu nome. O nome limaçon vem da palavra em Latin "limax" que significa "caracol".

Após essa época diversos trabalhos têm sido publicados sobre essa curva bem como diversas definições geométricas têm sido dadas. Vários aparelhos foram criados para descrevê-la mecanicamente por um movimento contínuo. O primeiro aparelho foi imaginado por Peaucellier numa publicação de 1873.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro $OA = a$, e uma grandeza h. (O ponto O é o *polo*, a circunferência é a *base* e a grandeza h é o *intervalo da conchóide*).

Cada reta do plano da circunferência e pertencente a O, determina um ponto na circunferência.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas, que determina na circunferência o ponto P.

Marca-se na reta s, a partir de P e nos dois sentidos a grandeza h. Tem-se os pontos Q e Q_1 onde $PQ = PQ_1 = h$.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *limaçon de Pascal*.

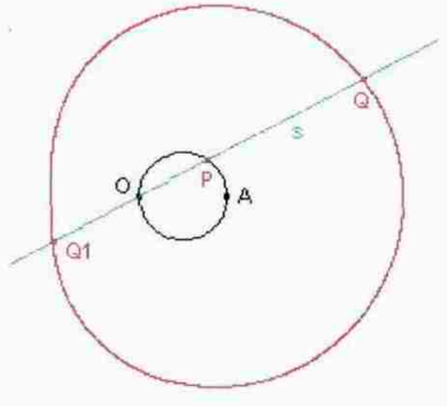


Fig. 40: Limaçon de Pascal (acnodal encurtada); $h = 2a$

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro AO, e h o intervalo da limaçon, tem-se:

a) Cartesiana: $x^2 + y^2 = h\sqrt{x^2 + y^2} + ax$

b) Polar: $r = a\cos\theta \pm h$

PROPRIEDADES

De acordo com a relação existente entre h e a, as formas e as propriedades das curvas obtidas variam. No entanto, independente disto, é uma curva plana do 4° grau, unicursal, contínua e fechada. Possui eixo de simetria e vértices.

Possui algumas propriedades particulares:

a) Para $h > a$ (fig. 40), além das propriedades gerais, possui ponto isolado que é o polo, e dois vértices. É, portanto, uma curva acnodal e chama-se *limaçon acnodal* (também chamada *limaçon achatada* ou *limaçon encurtada*);

b) Para $h = a$ (fig. 41), tem-se a limaçon cuspidal (também chamada limaçon ordinária ou cardióide);

c) Para $h < a$ (fig. 42), além das propriedades gerais, admite ponto crunodal duplo e dois vértices. É, portanto, uma curva crunodal e chama-se *limaçon crunodal* (também chamada *limaçon alongada*).

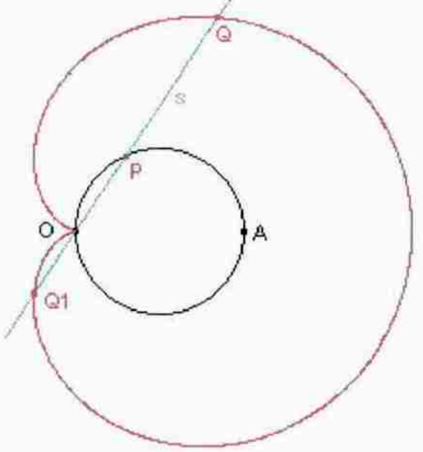


Fig. 41: Limaçon de Pascal (cuspidal ordinária); $h = a$

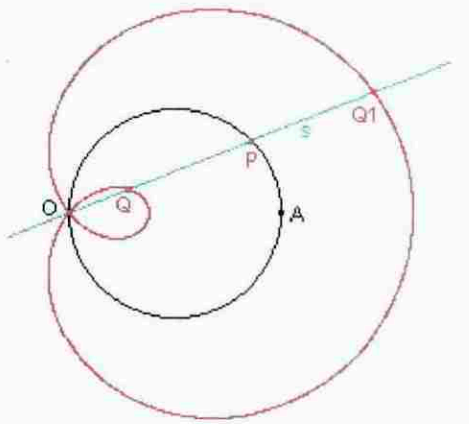


Fig. 42: Limaçon de Pascal (crunodal alongada); $h < a$

A limaçon é a podária da circunferência em relação a um ponto qualquer do seu plano; quando o ponto é interior à circunferência, a limaçon é acnodal (fig. 43); quando o ponto pertence à circunferência, a limaçon é cuspidal – cardióide (fig. 44); e quando o ponto é exterior à circunferência a limaçon é crunodal (fig 45).

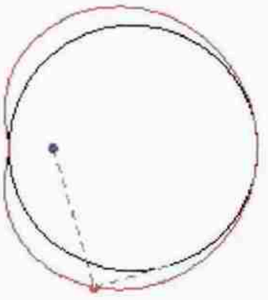


Fig. 43: Limaçon Acnodal

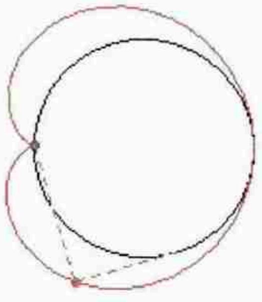


Fig. 44: Limaçon Cuspidal

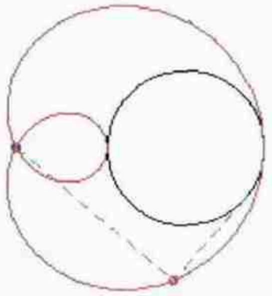


Fig. 45: Limaçon crunodal

2.3.5 CARDIÓIDE

HISTÓRIA

A cardióide, um nome primeiramente usado por Castillon em um *paper* no *Philosophical Transactions of the Royal Society* em 1741.

Seu comprimento foi descoberto por La Hire em 1708, e sobre o descobrimento da curva há algumas reivindicações.

Roemer, em 1674, estudou-a para investigar qual seria o melhor formato para os dentes de um engrenagem.

A cardióide é um caso especial da limaçon de Pascal (Étienne Pascal), pai de Blaise Pascal. Sendo assim, seu estudo é anterior a Castillon e La Hire.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro *OA*, e uma grandeza $h = OA$. (O ponto *O* é o *polo*, a circunferência é a *base* e a grandeza *h* é o *intervalo* da limaçon).

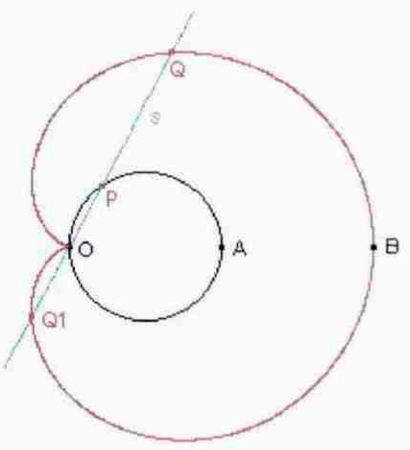


Fig. 46: Cardióide

Cada reta do plano da circunferência e pertencente a *O*, determina um ponto na circunferência.

Seja *s*, por exemplo, uma dessas retas, que determina na circunferência o ponto *P*.

Marca-se na reta *s*, a partir de *P* e nos dois sentidos a grandeza *h*. Tem-se os pontos Q e Q_1 onde $PQ = PQ_1 = h$.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *cardióide*.

EQUAÇÃO

Sendo a o raio AO, tem-se:

a) Cartesiana: $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

b) Polar: $r = 2a(1 + \cos\theta)$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, unicursal, contínua, cuspidal e fechada. Tem um eixo de simetria, um vértice e um ponto de reversão de primeira espécie.

O comprimento da cardióide é oito vezes maior que o comprimento de sua base.

Na figura 46, o eixo de simetria é a reta imaginária que contém o diâmetro AO. O ponto de reversão é O e o vértice é B.

A cardióide é uma curva que pode ser gerada por um ponto de uma circunferência rolando, sem deslizar, em volta de outra de mesmo raio. Sendo assim, a cardióide é uma epiciclóide. (Fig. 47)

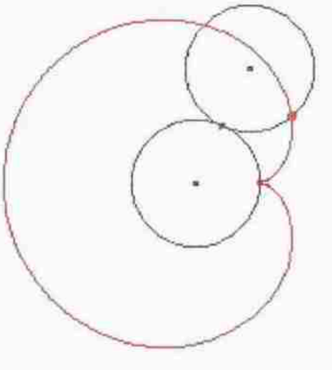


Fig. 47: Cardióide

2.3.6 CAPA OU CURVA DE GUTSCHOVEN

HISTÓRIA

Esta curva foi primeiramente estudada por G. van Gutschoven por volta de 1662. Esta curva também foi estudada por Newton e, alguns anos mais tarde, por Johann Bernoulli.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma reta t e um ponto O não pertencente a t.

Seja OB perpendicular a t.

Cada reta pertencente a O a apoiando-se em t, determina um ponto em t.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas, e seja M o ponto que ela determina em t.

Seja h a distância de M a B.

Marca-se na reta s, a partir do ponto O e nos dois sentidos, o comprimento h. Têm-se os pontos Q e Q_1.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *capa*.

EQUAÇÃO

Sendo a a distância OB, tem-se:

a) Cartesiana: $y^2 = \dfrac{x^2(x^2+y^2)}{a^2}$

b) Polar: $r = a\ tg\theta$

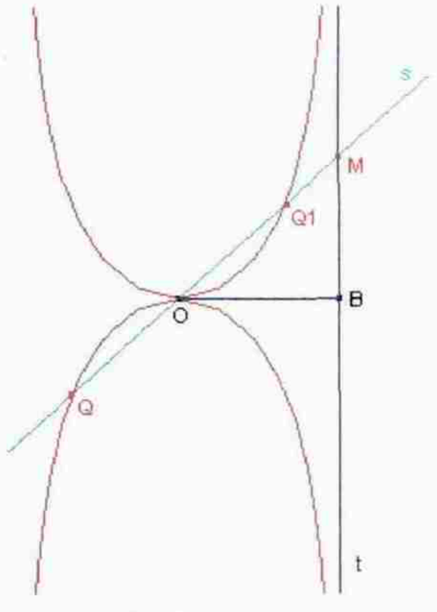


Fig. 48: Capa

PROPRIEDADES

É uma quártica plana com dois ramos e aberta. Admite dois eixos de simetria e um vértice, que também é centro e ponto osculador duplo de 1ª espécie, onde há dupla inflexão. A curva admite ainda, duas assíntotas paralelas e eqüidistantes de um dos eixos.

Na figura 48, os eixos de simetria são os eixos coordenados cartesianos com origem em O. O vértice é a origem (ponto O) onde há dupla inflexão. As assíntotas são as retas t e a sua simétrica em relação ao ponto O.

2.3.7 QUÁRTICA PIRIFORME OU QUÁRTICA DE WALLIS

HISTÓRIA

Esta curva foi estudada por Longchamps em 1886.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro AO e seja uma reta r perpendicular a AO. (A circunferência é a *base*, o ponto O é o *polo* e a reta r é a *diretriz*).

Cada reta do plano da circunferência e pertencente a O determina um ponto na reta r.

Seja s, por exemplo, uma dessas retas e seja M o ponto que ela determina em r.

Traça-se por M a corda paralela a AO; tem-se NN_1. Pelos pontos N e N_1, traçam-se as

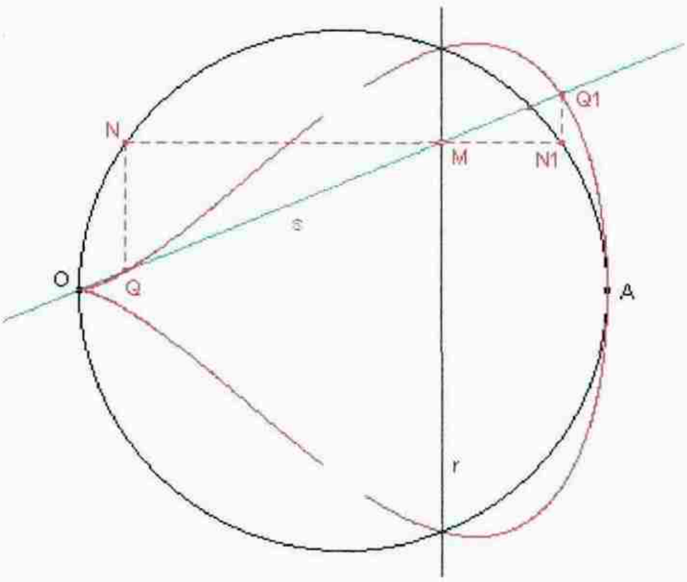


Fig. 49: Quártica piriforme

perpendiculares a AO que determinam os pontos Q e Q_1 em s.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *quártica piriforme*.

EQUAÇÃO

Sendo a o diâmetro AO, e b a distância de r a O, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2 = \frac{x^3(a-x)}{b^2}$$

b) Polar: $$r^4\cos^4\theta - ar^3\cos^3\theta + b^2r^2\,\text{sen}\,\theta = 0$$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, circular, unicursal, contínua e fechada. Tem eixo de simetria, um vértice e um ponto de reversão de primeira espécie.

Na figura 49, o eixo de simetria é a reta imaginária que contém AO. O ponto O é o ponto de reversão de primeira espécie. O ponto A é o vértice.

2.3.8 FÓLIO SIMPLES OU OVÓIDE

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja um segmento AO e seja, ainda uma reta s pertencente ao ponto O.

Traça-se a perpendicular AP de A a s.

De P traça-se PJ perpendicular a AO.

De J traça-se JQ perpendicular a s. Fica, assim, determinado em s o ponto Q.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *fólio simples*.

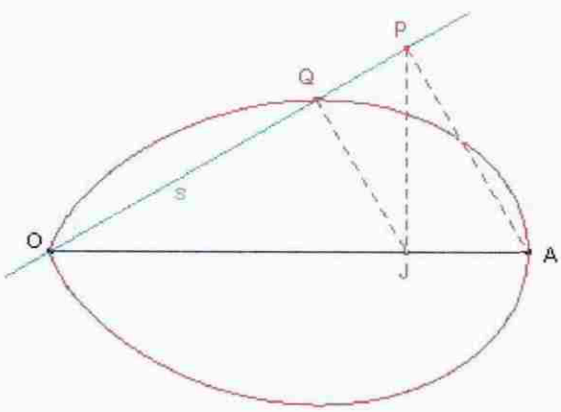


Fig. 50: Fólio simples

EQUAÇÃO

Sendo a a distância AO, tem-se:

a) Cartesiana: $x^3 = \dfrac{(x^2 + y^2)^2}{a}$

b) Polar: $r = a\cos 3\theta$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana unicursal, contínua e fechada. Tem um eixo de simetria e dois vértices, sendo um deles ponto triplo da curva.

Na figura 50, o eixo de simetria é o segmento AO. Ao vértices são os pontos O e A, sendo O o ponto triplo.

2.3.9 QUÁRTICAS DE BOOTH

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de diâmetro AB e raio CA. Seja um ponto O pertencente ao suporte de CA.

Cada secante pertencente a O determina dois pontos na circunferência.

Seja, por exemplo, s uma dessas secantes que determina P e M na circunferência.

Marca-se na reta s, a partir de O, e nos dois sentidos a corda PM. Têm-se os pontos Q e Q_1.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *quártica de Booth*.

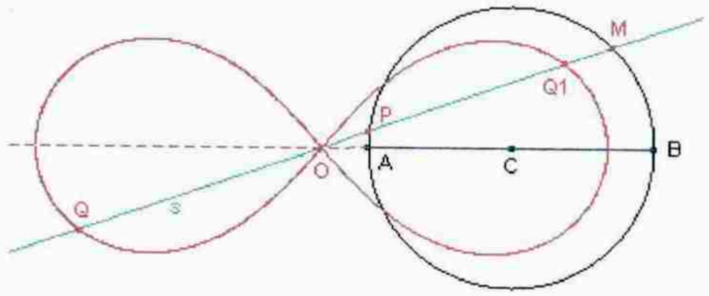


Fig. 51: Quártica de Booth (Lemniscata hiperbólica)

Para $CO > CA$, têm-se as *lemniscatas hiperbólicas*. (Fig. 51)

Para $CO = CA$, têm-se dois círculos iguais e tangentes em A.

Para $CA > CO > \frac{\sqrt{6}}{4}CA$, têm-se *lemniscatas elíticas*. (Fig 52)

Para $\frac{\sqrt{6}}{4}CA \geq CO > 0$, têm-se *ovais*. (Fig. 53)

Para $CO = 0$, tem-se um círculo concêntrico com o círculo dado, cujo raio é o dobro do dado.

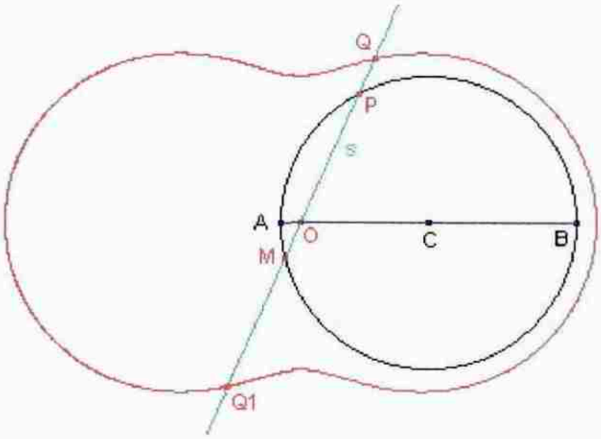


Fig. 52: Quártica de Booth (Lemniscata elítica)

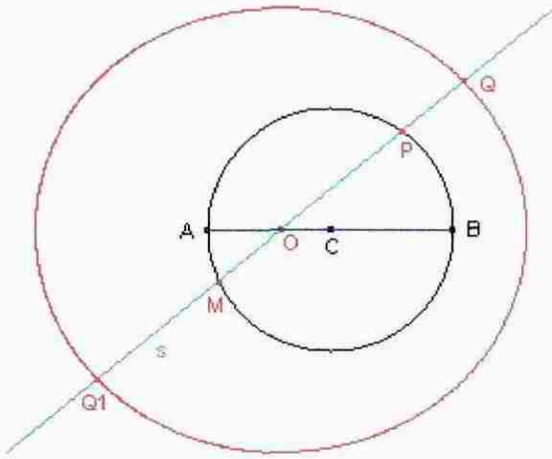


Fig. 53: Quártica de Booth (Oval)

2.3.10 LEMNISCATA DE BERNOULLI OU LEMNISCATA EQUILÁTERA

HISTÓRIA

Em 1694, Jacob Bernoulli publicou um artigo na *Acta Eruditorum* (Espécie de "periódico científico" mensal fundado em 1682). Este artigo falava sobre uma curva com a forma do número 8, ou um nó, ou uma fita. Ele a chamou, em latim, *lemniscus*, que significa "fita pendante".

Jacob Bernoulli não estava ciente que a curva que descrevera era um exemplo especial de uma curva que Cassini descreveu em 1680.

As propriedades gerais das lemniscatas foram descobertas por Giovanni Fagnano em 1750.

As investigações de Euler sobre o tamanho do arco da curva em 1751, conduziram para o trabalho futuro em funções elípticas.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Dados dois pontos fixos (*focos*) C e C_1. Para se traçar a lemniscata de Bernoulli, determina-se o centro da curva O, como sendo o ponto médio dos dois focos.

Traçam-se as retas que contém o ponto O e fazem ângulos de 45° com as retas que contém os focos. Essas retas, que são perpendiculares entre si, são tangentes à lemniscata no seu centro (ponto O).

Traça-se uma circunferência que tenha centro em um dos focos e seja tangente às retas.

Cada secante pertencente a O determina dois pontos na circunferência.

Seja, por exemplo, s uma dessas secantes que determina P e M na circunferência.

Marca-se na reta s, a partir de O, e nos dois sentidos a corda PM. Têm-se os pontos Q e Q_1.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *lemniscata de Bernoulli*.

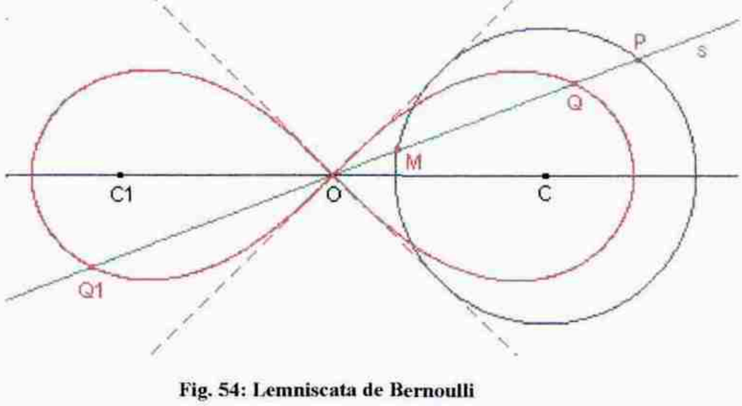


Fig. 54: Lemniscata de Bernoulli

EQUAÇÃO

Sendo a a distância OC, tem-se:

a) Cartesiana: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

b) Polar: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, unicursal, fechada e crunodal. Tem dois eixos de simetria iguais; um dos eixos encontra a curva nos vértices, e o outro só tem com a curva um ponto comum que é o seu centro. Seu centro é ponto crunodal duplo.

Na figura 54, os eixos de simetria são a reta que contém os focos e a perpendicular a esta no ponto O. O ponto duplo é a origem.

2.3.11 BICÓRNIO

HISTÓRIA

O bicórnio é o nome de uma coleção de quárticas estudadas por Sylvester em 1864. Algumas delas foram estudadas por Cayley em 1867.

O bicórnio estudado por Sylvester e Cayley é diferente deste mostrado aqui. No entanto, foi dada a atenção a este pois possui uma fórmula mais simples e possui essencialmente a mesma forma.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

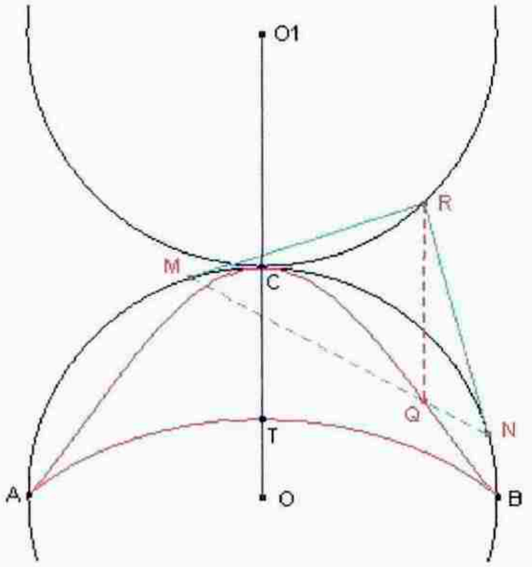


Fig. 55: Bicórnio

Sejam duas circunferências de mesmo raio e tangentes entre si.

Seja R um ponto da circunferência de centro O_1. A polar* de R em relação à circunferência de centro O é MN.

Traça-se RQ paralela à linha dos centros. Essa reta encontra a polar em Q.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é a curva chamada *bicórnio*.

Cada semi-círculo de centro O_1 permite o traçado de cada um dos ramos da bicórnio.

* Obs.: Polar é a corda concebida pelas intersecções das tangentes a uma curva, comuns em um ponto externo, com esta curva.

EQUAÇÃO

Sendo a o raio OB, tem-se:

a) Cartesiana: $$y^2(a^2 - x^2) = (x^2 + 2ay - a^2)^2$$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, unicursal, contínua e fechada. Tem dois ramos desiguais com dois pontos de reversão de primeira espécie comuns; um dos ramos possui dois pontos de inflexão. Admite um eixo de simetria e dois vértices.

Na figura 55, os pontos A e B são pontos de reversão de 1ª espécie. Os pontos T e C são vértices. O vértice T está a 1/3 da distância OC.

2.3.12 CRUCIFORME

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma elipse, e considere-se um ponto P dessa curva. A tangente em P encontra os eixos em M e N. Traça-se por M e N paralelas aos eixos. Essas paralelas admitem o ponto comum Q.

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *cruciforme*.

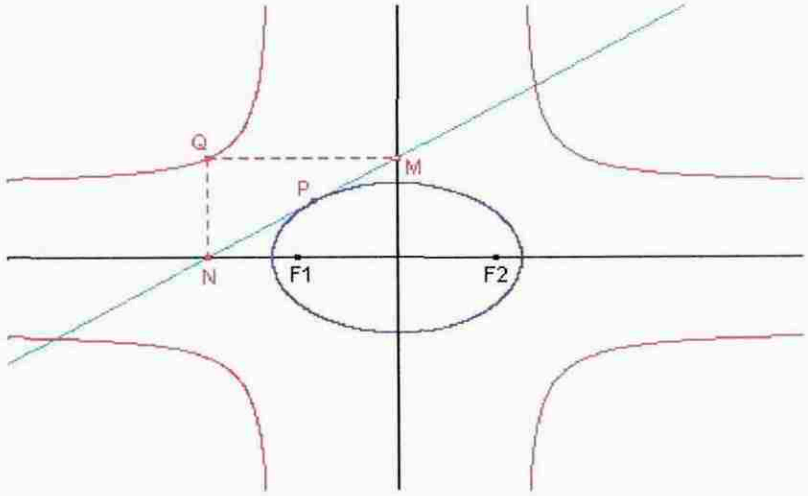


Fig. 56: Cruciforme

EQUAÇÃO

Sendo a o semi-eixo maior da elipse, e b o semi-eixo menor tem-se:

Cartesiana: $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1 \quad ou \quad x^2y^2=b^2x^2+a^2y^2$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana, aberta e unicursal. Tem dois eixos de simetria, um centro e quatro ramos iguais. Admite quatro assíntotas, sendo cada duas paralelas e eqüidistantes dos eixos; essas assíntotas são as tangentes nos vértices da elipse. O centro é o ponto isolado da curva.

2.3.13 PUNTIFORME

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma hipérbole, e considere-se um ponto P dessa curva. A tangente em P encontra os eixos em M e N. Traça-se por M e N paralelas aos eixos. Essas paralelas admitem o ponto comum Q.

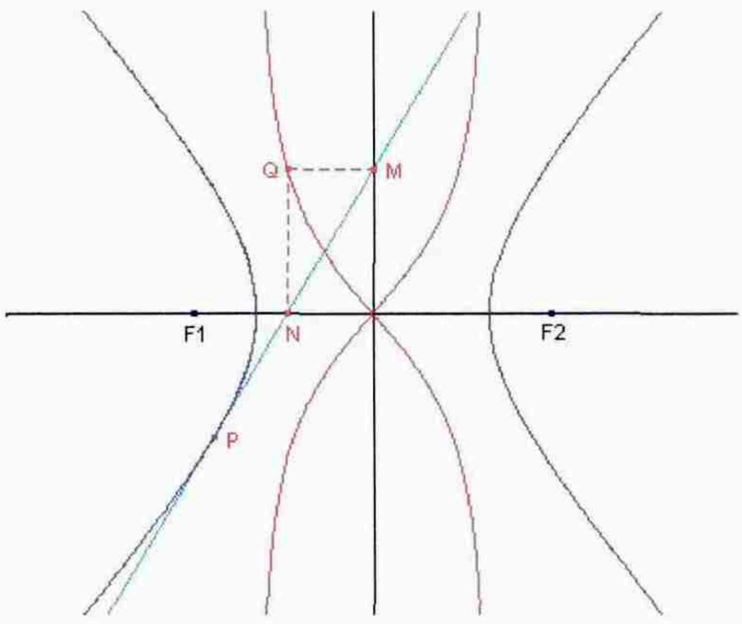


Fig. 57: Puntiforme

O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos, é a curva chamada *puntiforme*.

EQUAÇÃO

Sendo a o semi-eixo real da hipérbole, e b o semi-eixo imaginário, tem-se:

Cartesiana: $$\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{y^2}=1 \quad ou \quad x^2y^2=a^2y^2-b^2x^2$$

PROPRIEDADES

É uma quártica plana e aberta. Tem dois eixos de simetria e um centro. Seu centro é ponto crunodal duplo, e as tangentes no centro são as assíntotas da hipérbole. Admite duas assíntotas eqüidistantes do centro.

2.4 CURVAS CICLOIDAIS

Partindo-se do problema geral, admita-se um plano; nesse plano há duas curvas tangentes. Considerando-se uma das curvas fixa e a outra girando, sem escorregar, na curva fixa. Considere-se um ponto qualquer M do plano, que acompanha o movimento da curva móvel, por estar permanentemente "preso" a ela. (M pode pertencer à curva móvel ou não).

O lugar geométrico das posições de M é uma curva chamada *curva cicloidal*.

O ponto M chama-se *ponto gerador*; a curva móvel chama-se *geratriz* (também chamada *roleta*), e a curva fixa chama-se *diretriz* (também chamada *base*).

Os nomes e propriedades das curva geradas por M dependem da natureza da geratriz, da diretriz e da posição do ponto M.

Serão estudadas, apenas, as curvas que se podem obter quando a diretriz e a geratriz são circunferências, e o caso especial da reta que pode ser considerada como uma circunferência de raio infinito.

Sendo, então, R o raio da diretriz (circunferência fixa), e r o raio da geratriz (circunferência móvel), têm-se os seguintes casos:

a) O raio da diretriz é finito e o da geratriz também, isto é, $0 < R < \infty$ e $0 < r < \infty$. A curva assim obtida chama-se *pericicloide*. Nesse caso, a geratriz pode estar no *exterior* ou no *interior* da diretriz; quando está no exterior, a pericicloide chama-se *epicicloide*, e quando está no interior a pericicloide chama-se *hipocicloide*. No caso da hipocicloide, r não pode ser qualquer. Seu valor deve estar entre *zero* e R, isto é, $0 < r < R$.

b) O raio da diretriz é infinito (reta) e o da geratriz é finito, isto é $R = \infty$ e $0 < r < \infty$. A curva obtida chama-se *cicloide*.

c) O raio da diretriz é finito e o da geratriz infinito, isto é, $0 < R < \infty$ e $r = \infty$. A curva obtida chama-se *evolvente* (também chamada *devoluta*).

Resumindo:

- Curvas Cicloidais
  - Periciclóides
    - *Epiciclóide* (geratriz no exterior): $0 < R < \infty$, $0 < r < \infty$
    - *Hipociclóide* (geratriz no interior): $0 < r < R < \infty$
  - Ciclóides: $R = \infty$ e $0 < r < \infty$
  - Evolventes: $0 < R < \infty$ e $r = \infty$

De acordo com a posição do ponto M em relação à circunferência geratriz, as curvas cicloidais podem apresentar a forma *ordinária* (também chamada *normal*, *perfeita* ou *regular*), a forma *encurtada* (também chamada *achatada*) ou a forma *alongada*.

As curvas pericicloidais foram estudadas por muitos matemáticos por volta do século 17. Entre eles temos Dürer (1515), Desargues (1540), Huygens (1679), Leibniz e Newton (1686), L'Hôpital (1690), Jacob Bernoulli (1690), La Hire (1694), Johann Bernoulli (1695), Daniel Bernoulli (1725) e Euler (1745-1781).

2.4.1 EPICICLÓIDES

Isaac Newton, em seu livro *Principia* discutiu a medição do comprimento da curva da epiciclóide.

As mais importantes epiciclóides são:

2.4.1.1 CARDIÓIDE

A cardióide (fig. 58) é a epiciclóide em que $R = r$, ou seja, o raio da geratriz é igual ao raio da diretriz. O ponto gerador M pertence à geratriz.

A equação da cardióide é:

$$\begin{cases} x = r(2\cos\alpha - \cos 2\alpha) \\ y = r(2\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,2\alpha) \end{cases}$$

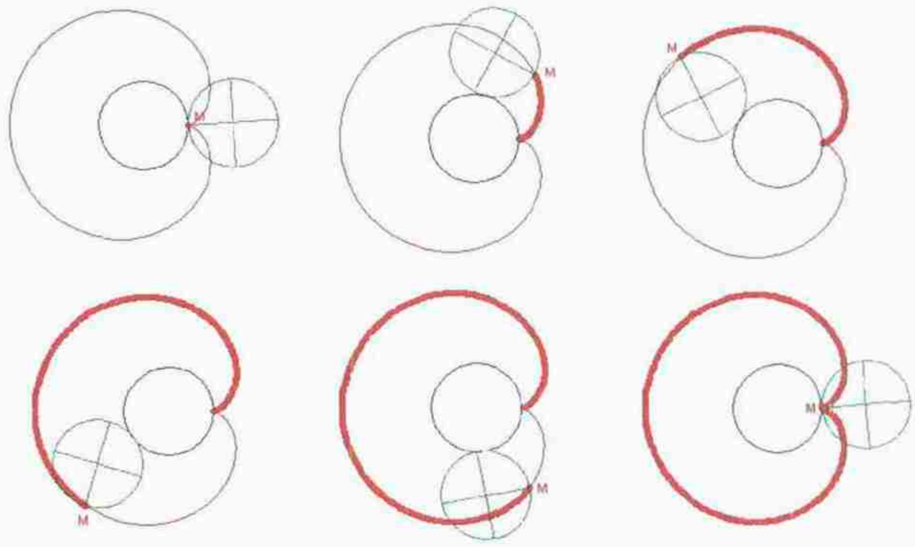


Fig. 58: Cardióide gerada pela epiciclóide

2.4.1.2 NEFRÓIDE OU EPICICLÓIDE DE HUYGENS

Nefróide (fig. 59) é a epiciclóide em que $R = 2r$, ou seja, o raio da diretriz é o dobro da geratriz e o ponto gerador M pertence à geratriz.

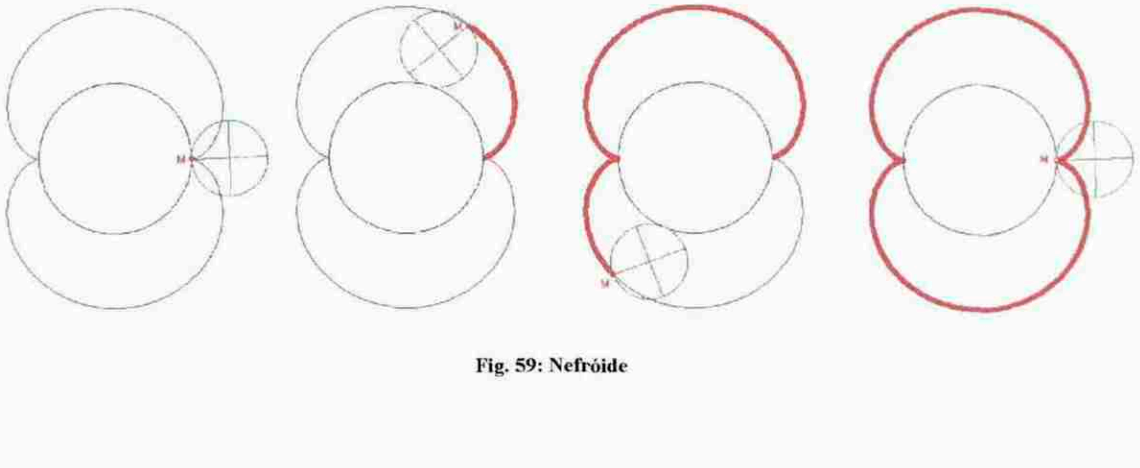


Fig. 59: Nefróide

A equação da nefróide é:

$$\begin{cases} x = r(3\cos\alpha - \cos 3\alpha) \\ y = r(3\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}\,3\alpha) \end{cases}$$

2.4.1.3 EPICICLÓIDE ALONGADA

Neste caso, o ponto gerador M é exterior à geratriz.

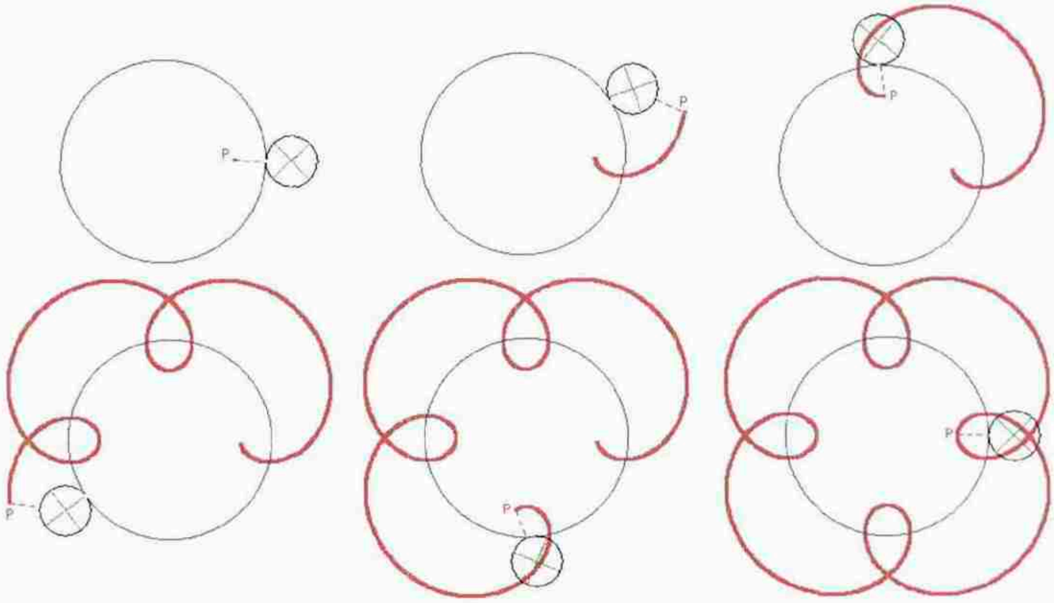


Fig. 60: Epiciclóide Alongada

Na figura 60, tem-se a epiciclóide alongada onde $R = 4r$, ou seja, o raio da diretriz é quatro vezes maior que o raio da geratriz.

2.4.1.4 EPICICLÓIDE ENCURTADA

Neste caso, o ponto gerador M é interno à geratriz.

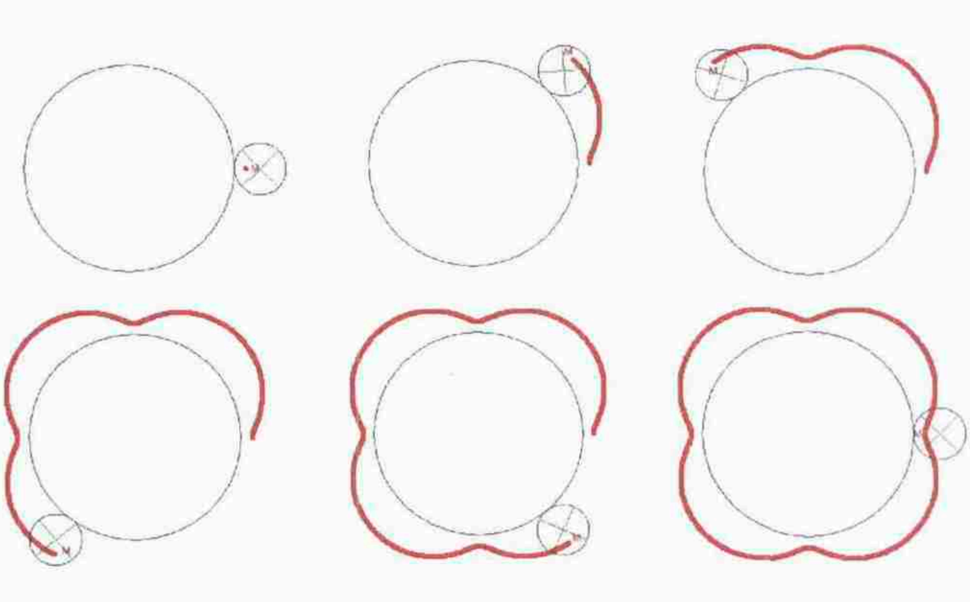


Fig. 61: Epiciclóide Encurtada

Na figura 61, tem-se a epiciclóide encurtada onde $R = 4r$, ou seja, o raio da diretriz é quatro vezes maior que o raio da geratriz.

2.4.2 HIPOCICLÓIDES

As mais importantes hipociclóides são:

2.4.2.1 ASTRÓIDE

(Também chamada tetracuspidal ou cubo-ciclóide)

HISTÓRIA

A astróide, dentre outras curvas cicloidais, foi descoberta por Roemer em 1674 para encontrar a melhor forma para os dentes de uma engrenagem.

A astróide adquiriu este nome somente em 1838, em um livro publicado em Viena. Após, outros nomes surgiram. Dentre eles, *cubo-ciclóide*.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

A astróide pode ser concebida como uma hipociclóide ordinária em que o raio da diretriz é o quádruplo do raio da geratriz, isto é, $R = 4r$. O ponto M (ponto gerador) pertence à geratriz. O seu traçado é, portanto, simples.

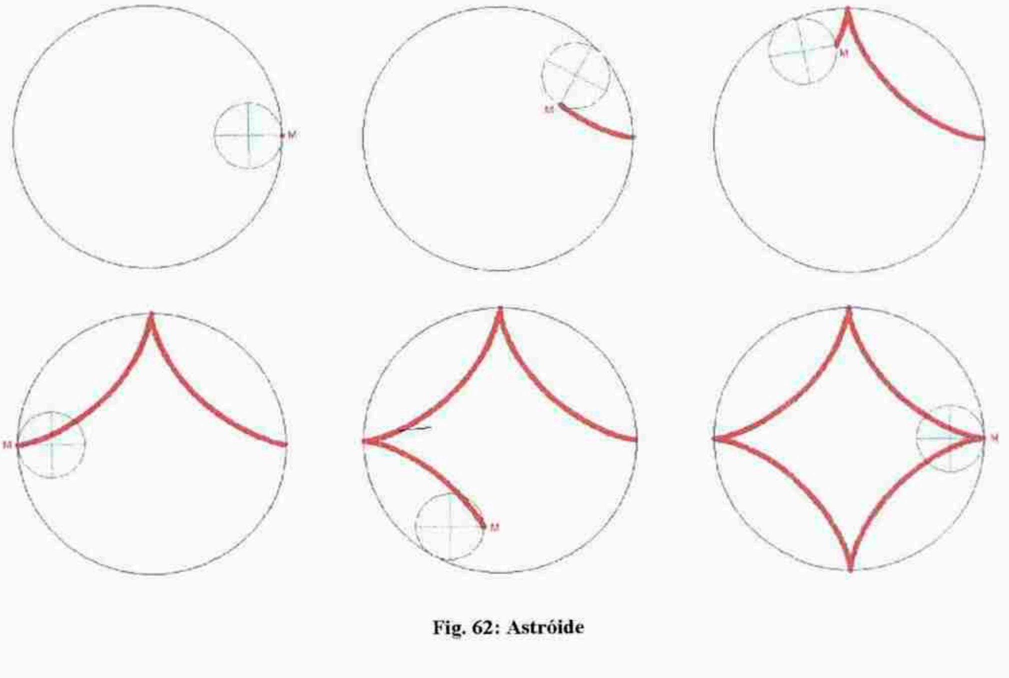


Fig. 62: Astróide

EQUAÇÃO

Sendo R o raio da diretriz e α o ângulo de rotação, tem-se como equação para a astróide:

a) Cartesiana: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$

b) Paramétrica: $\begin{cases} x = R\cos^3 \alpha \\ y = R\,\mathrm{sen}^3\, \alpha \end{cases}$

PROPRIEDADES

A astróide é uma curva algébrica plana do 6° grau com quatro pontos de reversão de primeira espécie. Tem centro e dois eixos.

O comprimento de um arco compreendido entre dois pontos de reversão é igual a $2\pi r$.

2.4.2.2 DELTÓIDE OU TRICUSPÓIDE

A deltóide foi primeiramente considerada por Euler em 1745 como uma relação a um problema ótico. Foi investigada, também, por Steiner em 1856 e em algumas ocasiões a curva é chamada de hipociclóide de Steiner.

Deltóide é a hipociclóide ordinária em que o raio da diretriz é três vezes maior que o raio da geratriz, ou seja, $R = 3r$ e o ponto M (ponto gerador) pertence à geratriz.

O tamanho da tangente da deltóide (segmento interno à curva) é constante e igual a $4r$. O comprimento total da curva é $16r$ e sua área interna é $2\pi r^2$.

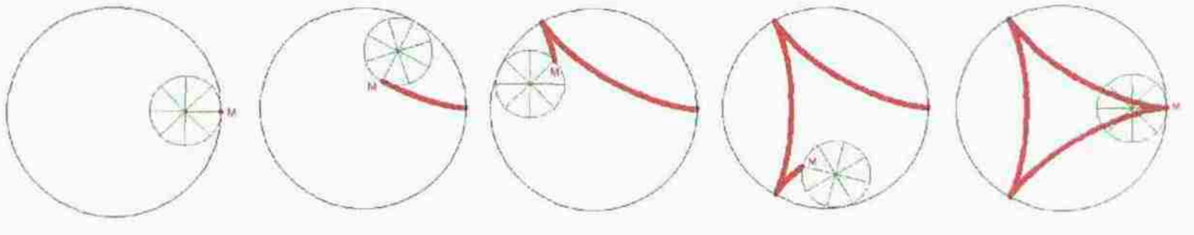


Fig. 63: Deltóide

2.4.2.3 HIPOCICLÓIDE ALONGADA

Neste caso, o ponto M é exterior à geratriz.

Na figura 64, tem-se a hipociclóide alongada em que $R = 2r$. Esta curva descreve, através do ponto M (ponto gerador), uma elipse. Por isso esta hipociclóide é chamada de *hipociclóide elíptica*. O mesmo acontece para a hipociclóide encurtada em que $R = 2r$.

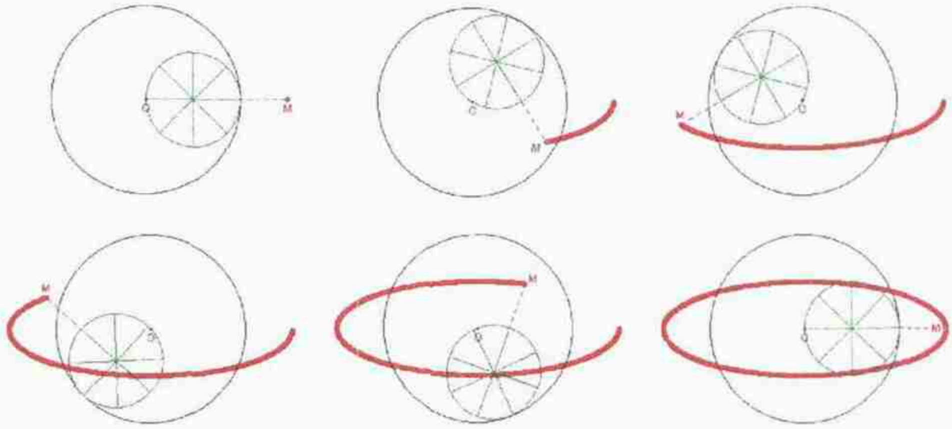


Fig. 64: Hipociclóide Alongada

Na figura 65, tem-se a hipociclóide alongada em que $R = 4r$, ou seja, o raio da diretriz é quatro vezes maior que o raio da geratriz.

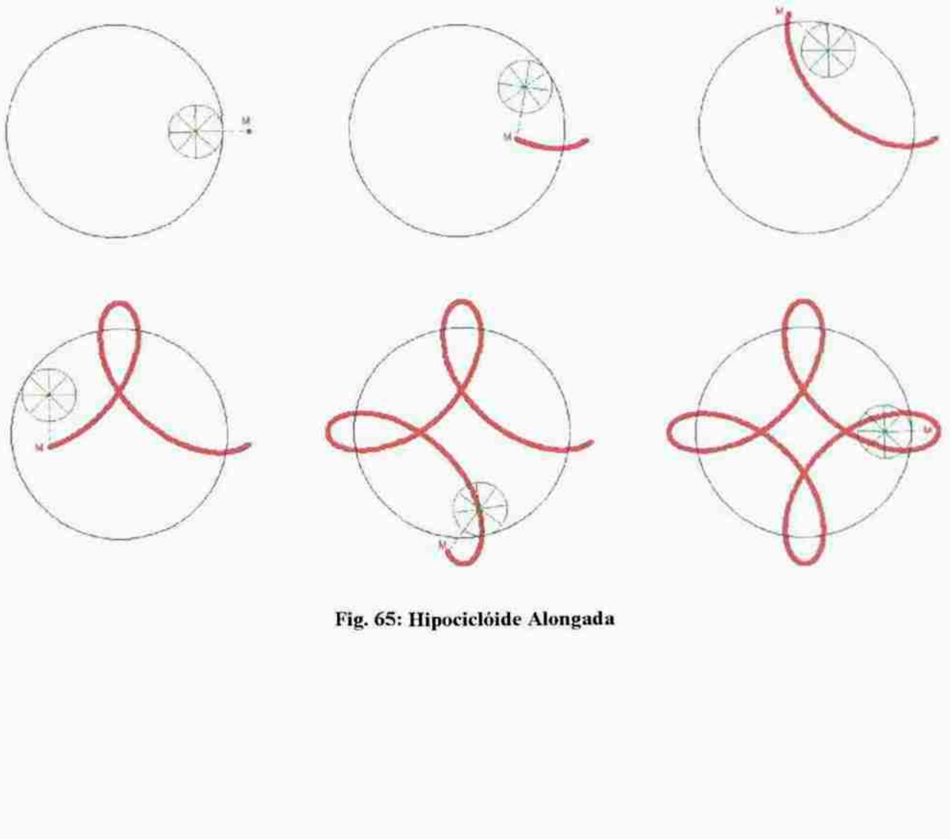


Fig. 65: Hipociclóide Alongada

2.4.2.4 HIPOCICLÓIDE ENCURTADA

Neste caso, o ponto M é interior à geratriz.

Na figura 66, tem-se a hipociclóide encurtada em que $R = 4r$, ou seja, o raio da diretriz é quatro vezes maior que o raio da geratriz.

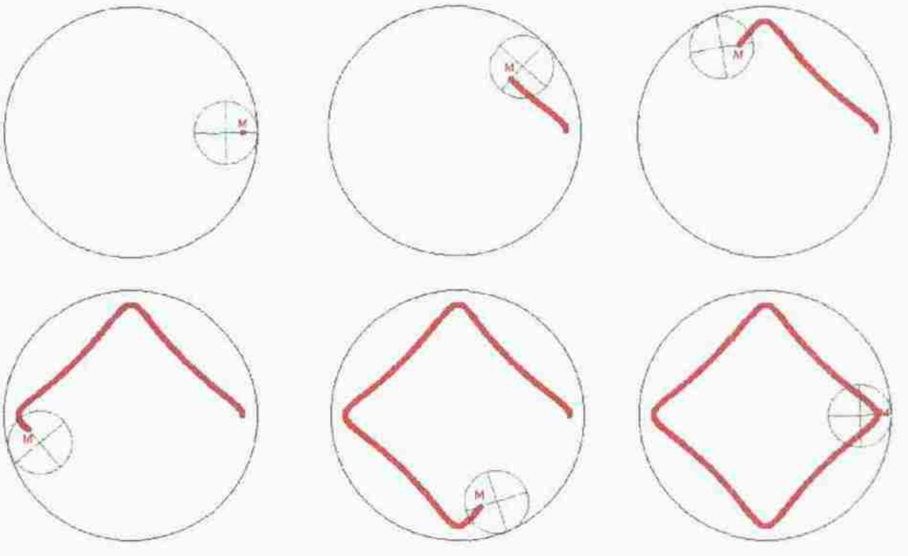


Fig. 66: Hipociclóide Encurtada

2.4.3 CICLÓIDE OU ROLETA

HISTÓRIA

Segundo SIMMONS (1987), parece ter sido Galileu o primeiro a notar a ciclóide e investigar suas propriedades, no início de 1600. Ele, no entanto, não descobriu qualquer propriedade, mas deu à curva seu nome atual e a recomendou seu estudo a seus amigos, incluindo Mersenne, de Paris.

Foi Torricelli, discípulo de Galileu que, em 1644, publicou sua descoberta em relação à área sob o arco. O comprimento do arco da ciclóide foi descoberto em 1658 pelo arquiteto Christopher Wren.

Em 1696, John Bernoulli concebeu e resolveu o famoso problema da *braquistócrona* (em grego: *tempo mais curto*). A curva braquistócrona é um arco de ciclóide. Ele publicou o problema (mas não a solução) como desafio a outros matemáticos da época. O problema era:

"dentre todas as curvas lisas de um plano vertical que une dois pontos dados P_0 e P_1 estando P_1 abaixo de P_0, mas não diretamente abaixo, determinar a curva particular sobre a qual uma partícula deslizará de P_0 a P_1 no menor tempo".

Leibniz e Newton, assim como John Bernoulli e seu irmão mais velho James, resolveram o problema. A ciclóide era bem conhecida de todos esses homens pelo conhecimento de um trabalho anterior do grande cientista holandês Huygens sobre relógios de pêndulos. Foi Huygens quem inventou o relógio de pêndulo.

DEFINIÇÃO GERAÇÃO E TRAÇADO

Para a construção da ciclóide, basta considerar uma circunferência de raio r tangente a uma reta t. (A circunferência é a *geratriz*, e a tangente é a *diretriz*).

Admita-se que a circunferência role sem escorregar na tangente e que um ponto M pertença à circunferência (geratriz).

O lugar geométrico dos pontos M assim obtidos é a curva chamada *ciclóide ordinária* (também chamada *ciclóide perfeita*, *ciclóide normal* ou *ciclóide regular*). (Fig. 67)

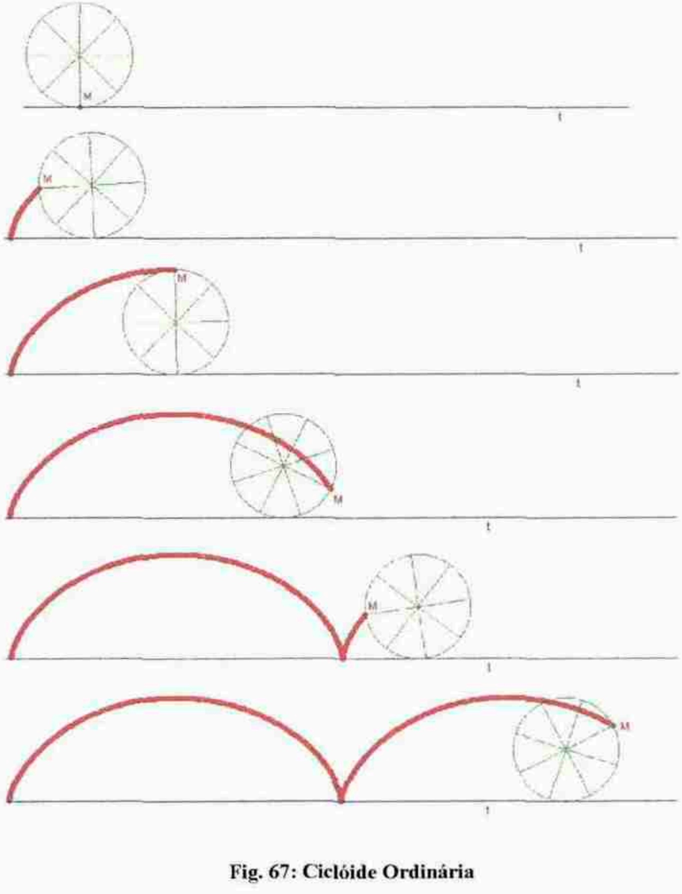


Fig. 67: Ciclóide Ordinária

Quando o ponto M está no interior da circunferência geradora, a curva chama-se *ciclóide encurtada* (também chamada *ciclóide achatada*) (fig. 69), e quando o ponto M está no exterior da circunferência geradora, a curva chama-se *ciclóide alongada* (fig. 68).

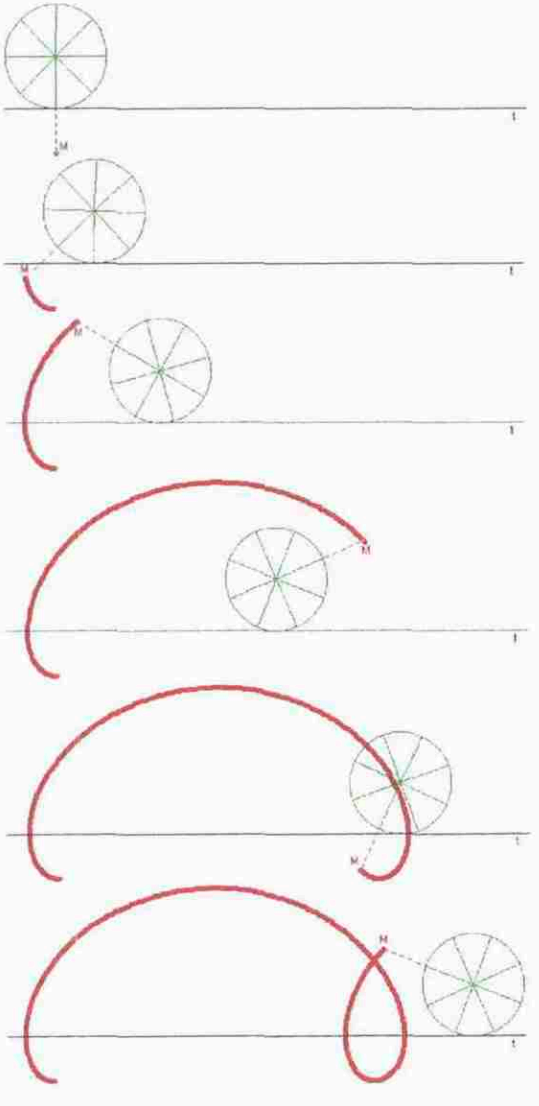


Fig. 68: Ciclóide Alongada

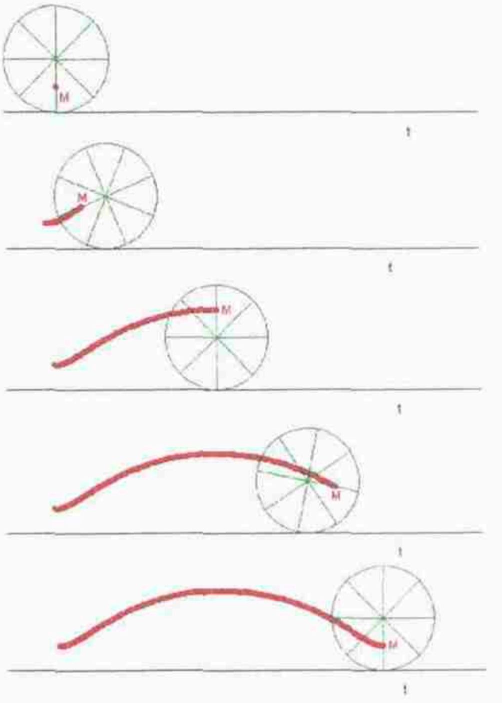


Fig. 69: Ciclóide Encurtada

EQUAÇÃO

Sendo r o raio da geratriz e α o ângulo de rotação, tem-se como equação da ciclóide:

a) Cartesiana: $$x = r \cdot arc\cos\frac{r-y}{r} \pm \sqrt{2ry - y^2}$$

b) Paramétrica: $$\begin{cases} x = r(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) \\ y = r(1 - \cos\alpha) \end{cases}$$

PROPRIEDADES

As ciclóides são curvas planas transcendentes. Cada ciclo da ciclóide encurtada apresenta duas inflexões. As ciclóides têm vértices e eixo de simetria.

- *Teorema de Huygens*: "O comprimento de um ciclo de uma ciclóide ordinária é igual a quatro vezes o diâmetro da geratriz";
- A área compreendida entre um ciclo da ciclóide ordinária e a diretriz é igual ao triplo da área da circunferência geradora;
- A ciclóide ordinária além de ser uma curva braquistócrona, é a única curva plana *tautócrona* ("tempo igual") para corpos submetidos apenas à ação da gravidade;
- As ciclóides são casos particulares das curvas cicloidais, quando $R = \alpha$. São, portanto, periciclóides em que o raio da diretriz é infinito.

O estudo, agora, será dirigido às curvas cicloidais em que o raio da diretriz é finito e o da geratriz infinito, isto é, $0 < R < \infty$ e $r = \infty$. A curva assim constituída chama-se *evolvente* (também chamada *devoluta*).

2.4.4 EVOLVENTE DO CÍRCULO OU DEVOLUTA DO CÍRCULO

HISTÓRIA

Esta curva foi estudada por Huygens, em 1693, quando estudava relógios de pêndulo que pudessem ser usados em navios no mar. Usou a evolvente de um círculo em seu primeiro relógio de pêndulo na tentativa de forçar o pêndulo a balançar na trajetória da ciclóide.

Um grande problema era construir um relógio de pêndulo que mantivesse o tempo exato no mar, e muitos anos foram gastos na procura desta solução.

DEFINIÇÃO, GERAÇÃO E TRAÇADO

Seja uma circunferência de raio OM e seja t a tangente em M.

(A circunferência é a *diretriz* e a reta tangente é a *geratriz*).

Admita-se que a tangente t role sem escorregar na circunferência, e que o ponto M permaneça fixo à tangente.

O lugar geométrico dos pontos M assim obtidos, é a curva chamada *evolvente do círculo* (também chamada *evolvente perfeita do círculo, evolvente normal do círculo ou evolvente regular do círculo*).

A evolvente é, pois, o lugar geométrico das posições de um ponto que pertence ao plano de uma circunferência e acompanha o movimento de uma tangente eu rola sem escorregar na circunferência.

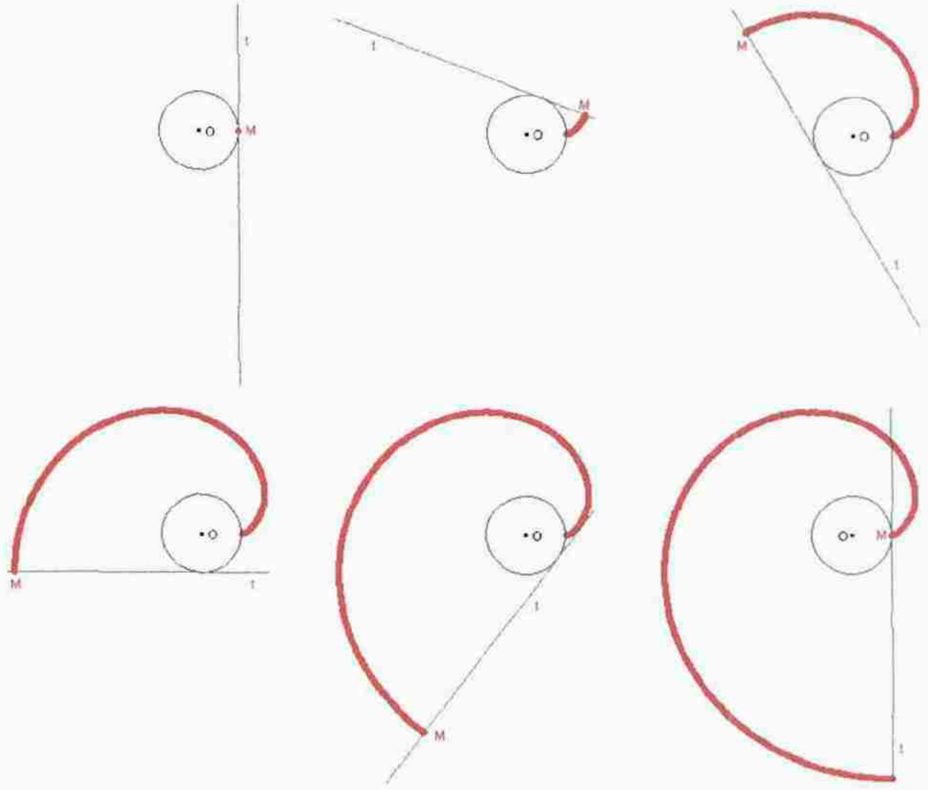


Fig. 70: Evolvente do Círculo

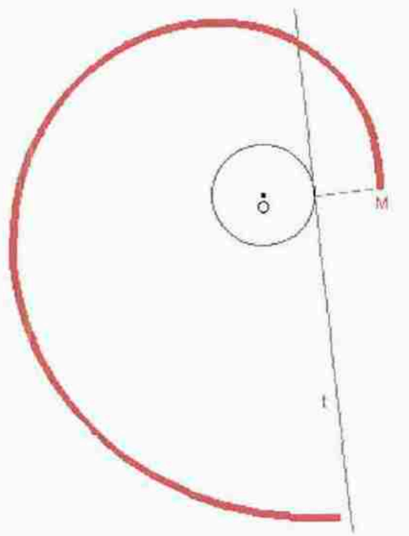
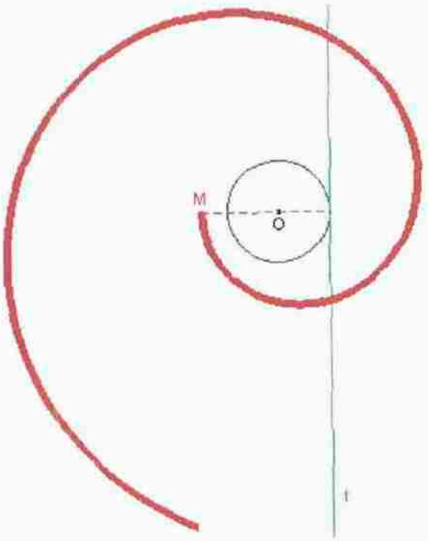


Fig. 71: Evolvente Encurtada

Quando M não pertence à tangente e está no semi-plano que não contém a diretriz, a curva chama-se *evolvente encurtada* (também chamada *evolvente achatada*). (Fig. 71)



Quando M não pertence à tangente e está no semi-plano que contém a diretriz, a curva chama-se evolvente alongada. (Fig. 72)

Fig. 72: Evolvente Alongada

EQUAÇÃO

Sendo R o raio da diretriz, e α o ângulo correspondente ao giro da geratriz, tem-se:

$$\begin{cases} x = R(\cos\alpha + \alpha \operatorname{sen}\alpha) \\ y = R(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha) \end{cases}$$

PROPRIEDADES

As evolventes são curvas planas e transcendentes.

Na evolvente ordinária, em cada posição do ponto gerador a sua distância ao ponto de tangência da respectiva tangente é igual ao arco percorrido pelo ponto de tangência.

A evolvente é caso particular das curvas cicloidais quando $r = \infty$. É, portanto, uma periciclóide em que o raio da geratriz é infinito.

CAPÍTULO III
GEOMETRIA DINÂMICA

Segundo Braviano (2002), a Geometria Dinâmica não é uma nova Geometria, mas simplesmente uma exploração da idéia de movimento para descrições geométricas.

Este movimento foi idealizado por geômetras gregos através de instrumentos capazes de descrever curvas mecanicamente.

No entanto, em meados da década de 80, nasceram os softwares Cabri-Géomètre e o atual The Geometer's Sketchpad. Ambos permitem uma abordagem da geometria de modo efetivamente dinâmico, usando o computador. Além disso, as figuras obtidas através destes softwares podem ser manipuladas sem perder suas propriedades geométricas. Nesta manipulação está o dinamismo.

O termo "Dynamic Geometry" é, na verdade, marca registrada da Key Curriculum Press, responsável pela comercialização do Geometer's Sketchpad.

Por estes e outros motivos, a Geometria Dinâmica contribuiu no ensino de matemática possibilitando representações gráficas de objetos geométricos que aproximam do objeto teórico o objeto material da tela do computador.

Conforme Braviano (2002) destaca, deve-se considerar que qualquer desenho no computador é construído a partir de um número finito de pontos. Sendo assim, a dinâmica se dá discretamente. A diferença está no fato de que as posições são desenhadas numa grande velocidade, o que nos permite obter um número muito grande delas.

Neste trabalho, optou-se pela utilização do software Cabri-Géomètre pois foi apresentado aos alunos do curso de licenciatura em Matemática na disciplina de Desenho Geométrico I, e pelo fácil acesso a informações sobre este software.

CAPÍTULO IV
CABRI-GÉOMÈTRE II

Segundo Baldin (2002), o Cabri-Géomètre II é um software educativo desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain no Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG). O IMAG é um laboratório de pesquisa em estruturas discretas e didáticas da Université Joseph Fourier em Grenoble, França, inserido ao Centre National de Recherches Scientifique (CNRS) e em colaboração com a Texas Instruments, para a versão Windows.

O Cabri-Géomètre é um software que permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem se movimentar conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos, constituindo-se numa ferramenta rica de validação experimental de construção geométrica. Ele tem outros aspectos que vão muito além da manipulação dinâmica e imediata das figuras.

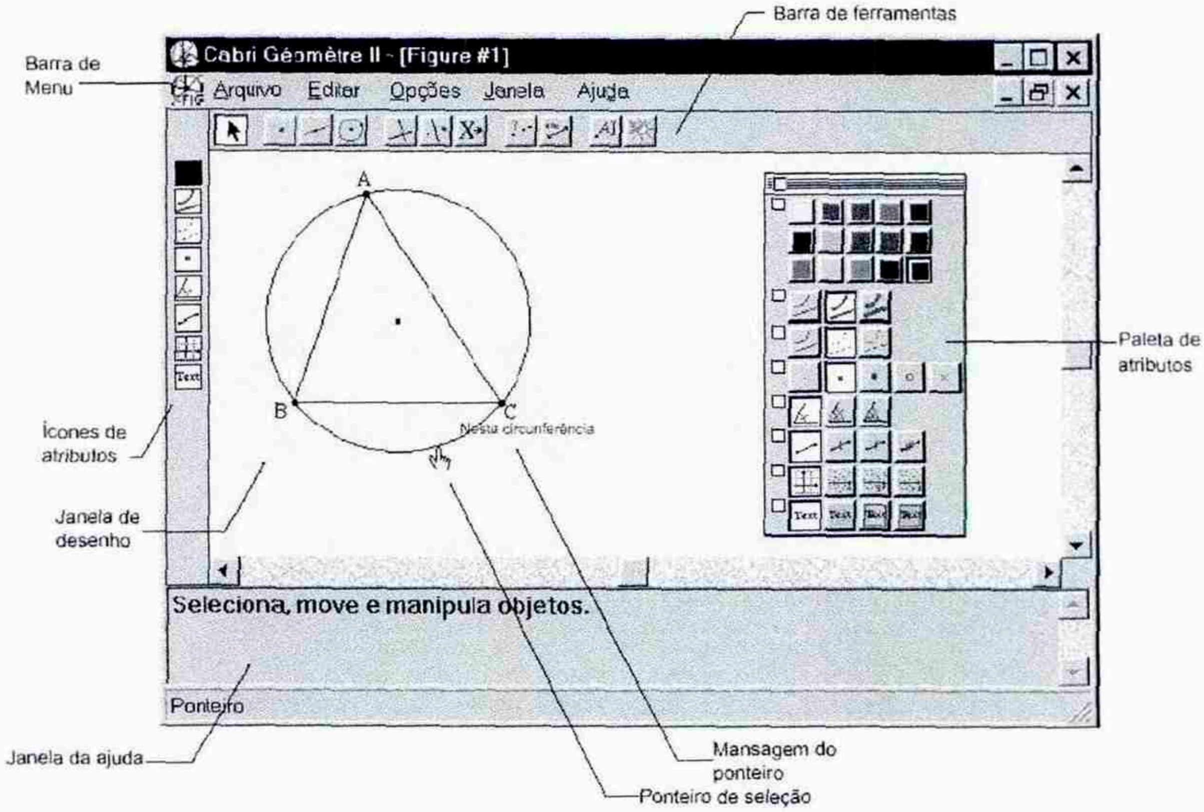


Fig. 73: Interface do Cabri-Géomètre II

Alguns recursos do Cabri-Géomètre II:

- construção de pontos, linhas, triângulos, polígonos, círculos e outros objetos geométricos básicos;
- a verificação de propriedades geométricas confirma hipóteses com base nos 5 postulados de Euclides;
- desenvolvido por matemáticos para a aprendizagem de matemática integrada. Os conceitos matemáticos do software são sólidos;
- translação, dilatação e rotação de objetos geométricos em torno de centros ou pontos específicos, além de reflexão, simetria e inversão;
- utiliza coordenadas cartesianas e polares, para atividades em Geometria Analítica;
- a animação ilustra as características dinâmicas das figuras;
- objetos utilizados na construção podem ser ocultados para maior clareza;
- cores como tinta e paleta de linhas;
- permite a criação de macros para construções que se repetem com freqüência.

A palavra CABRI é abreviatura de **Ca**hier de **Br**ouillon **I**nteractif (que significa caderno de rascunho interativo). Cabri-Géomètre II é *marca registrada* da Université Joseph Fourier.

A apostila da Texas Instruments - Cabri Geometry II – Guia de utilização para Windows – foi o material consultado para conhecimento e aprimoramento das funções do software.

CAPÍTULO V
O CD COM AS CURVAS

Este trabalho é acompanhado por um cd que contém todas as curvas que aqui foram estudadas. O objetivo da construção deste cd é o simples fato de que as curvas vistas em livros são estáticas e de difícil assimilação de suas propriedades. O traço das curvas expostas no "cd Curvas" é dinâmico, ou seja, o ponto gerador do lugar geométrico é mostrado dinamicamente, dando maior clareza às definições e propriedades estudadas previamente.

As figuras que estão no "cd Curvas", foram construídas utilizando o software Cabri-Géomètre II e transformadas para arquivos JAVA, possibilitando a visualização destas curvas sem, ao menos, possuir o software Cabri-Géomètre II. É necessário, apenas, um browser como o Internet Explorer. A figura 74 mostra a interface do "cd Curvas".

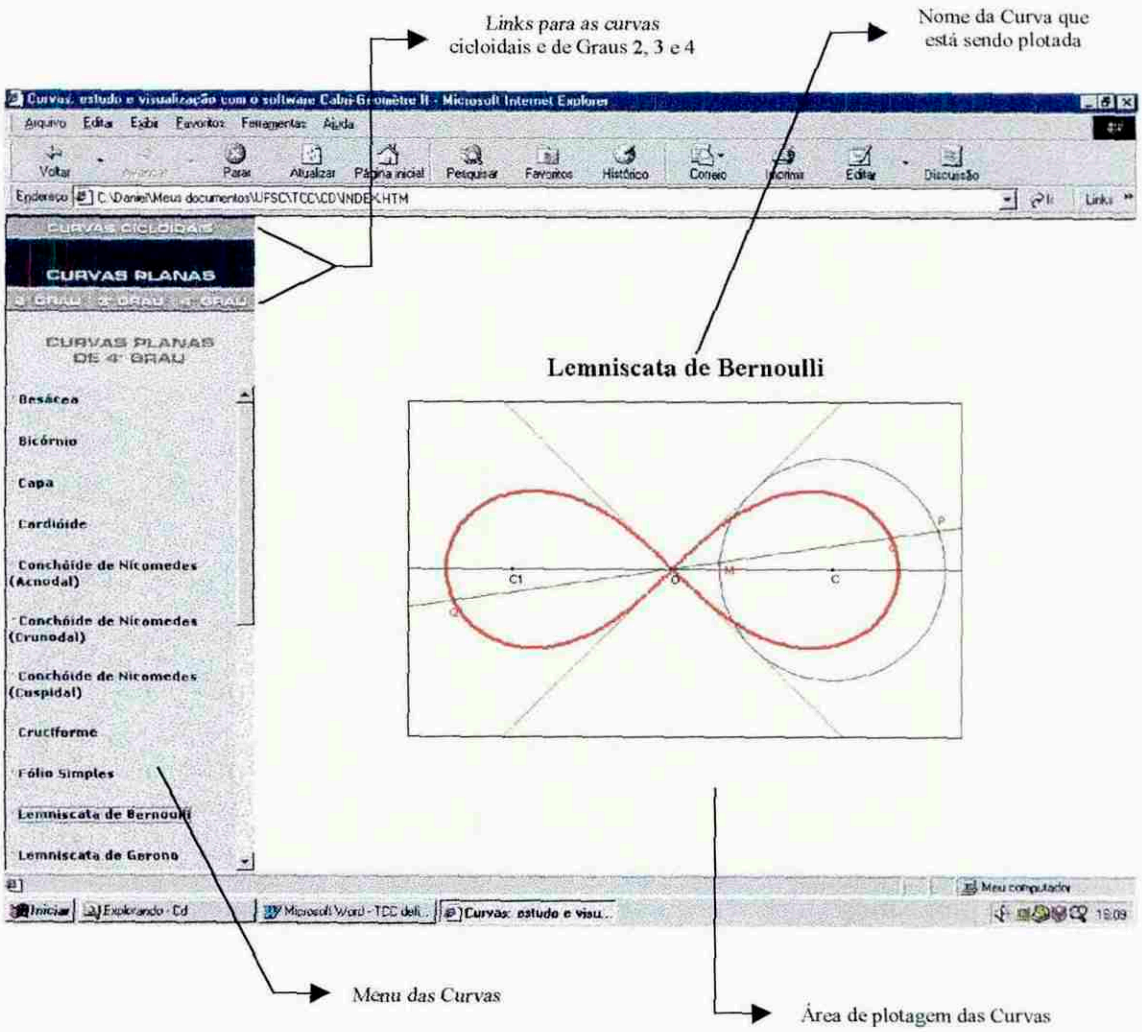


Fig. 74: Interface do "CD Curvas"

Para acionar a janela principal do "cd Curvas", abra o arquivo index. A janela do aplicativo será iniciada e a navegação pelas curvas será de maneira simples e rápida.

O "cd Curvas" é melhor visualizado na resolução 1024x768.

A velocidade com que o traço é plotado depende da configuração do computador que está sendo utilizado. Quanto mais veloz for o processador do computador, mais veloz será a plotagem do traço da curva e vice-versa.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivos principais o estudo de algumas curvas e a geração de um cd com essas curvas representadas dinamicamente pelo seu traço. Com isso, a visualização e compreensão das propriedades estudas deram-se de maneira mais clara e objetiva, respondendo à necessidade de um apoio neste sentido.

Quando a construção passa do papel para a tela do computador, a capacidade de visualização e assimilação das curvas é imensamente ampliada, despertando ainda mais o interesse em estudá-las.

Sendo assim, a interação entre o trabalho escrito e as curvas dinamicamente vistas na tela do computador auxilia, em muito, a compreensão destas.

Em relação à pesquisa desenvolvida em cada curva, a introdução histórica foi importante para situar o leitor à época em que a curva foi estudada por seus respectivos matemáticos.

As propriedades apresentadas em cada curva, foram minuciosamente conferidas e dão maior embasamento àquelas encontradas em alguns livros da área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDIN, Yuriko Yamamoto; VILLAGRA, Guillermo Antonio Lobos. **Atividades com Cabri-Géomètre II**. São Carlos: EdUFSCar, 2002.

BRAVIANO, Gilson; RODRIGUES, Maria Helena W. L. **Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria?**. RPM 49, p. 22-26.

RANGEL, Alcyr Pinheiro. **Curvas**. Rio de Janeiro: UFRJ – Ilha Universitária, 1974.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo: McGraw-Hill, 1987; v.2.

TI. Texas Instruments. **Cabri Geometry II – Guia de utilização para Windows**. Disponível em: http://www.cabri.com.br. Acesso em 10 dez 2002.

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html. Acesso em: 10 out. 2002

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html. Acesso em: 17 out. 2002